République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des mathématiques, de l'informatique et des sciences de la matière.
Département des mathématiques
Laboratoire de domiciliation: Mathématiques Appliquées et de Modélisation

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT EN 3ème CYCLE

Domaine : Mathématiques et Informatique. Filière : Mathématiques Appliquées.
Spécialité : Mathématiques Appliquées.

Présentée par

KAMOUCHE Somia

Intitulée

Sur le spectre quadratique généralisé des opérateurs bornés

Soutenue le : 26/02/2024 Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	**Grade**		
Mr. AISSAOUI Mohamed Zine	Pr	Univ. de Guelma	Président
Mr. GUEBBAI Hamza	Pr	Univ. de Guelma	Encadreur
Mr. GHIAT Mourad	MCA	Univ. de Guelma	Co-encadreur
Mr. KECHKAR Nasserdine	Pr	Univ. d'Oum El Bouaghi	Examinateur
Mme. BENSSAAD Meryem	MCA	Univ. de Guelma	Examinatrice

Année Universitaire : 2023/2024.

Remerciement

À Allah Tout-Puissant,

Je commence ce message de gratitude envers ***Allah****, qui m'as guidé, soutenu et accordé la patience et la force nécessaires pour mener à bien ce long voyage académique. Ta lumière m'a éclairé tout au long de ma thèse, et je Te suis infiniment reconnaissant pour toutes les bénédictions que Tu m'as accordées.*

Ensuite, je tiens à exprimer ma reconnaissance envers les personnes qui ont joué un rôle essentiel dans ma réussite académique.

À mon directeur de thèse, Je tiens à exprimer mes sincères remerciements, ma reconnaissance et mon respect envers mon enseignant et mon superviseur, le Professeur ***Pr. Hamza GUEBBAI****, pour tous ses précieux conseils au cours de ces années et pour le temps précieux qu'il a consacré à expliquer toute demande ou question, et son engagement inébranlable envers mon travail. Ses conseils judicieux et son soutien indéfectible ont été des piliers de mon parcours.*

À mon co-directeur de thèse, Professeur ***Mourad GHIAT****, je suis reconnaissant pour sa précieuse contribution à ma recherche. Ses idées, son expertise, et sa bienveillance ont grandement enrichi mon travail.*

Au Professeur ***Pr. Mohamed Zine Aissaoui****, je tiens à exprimer ma gratitude pour sa sagesse, sa vision, et son appui tout au long de ce parcours. Ses enseignements m'ont inspiré et guidé.*

Je remercie vivement les membres du jury le Professeur ***Pr. Kechkar Nasserdine*** *et le docteur* ***Dr. Bensaad Meryem*** *d'avoir accepté d'éxaminer cette thèse.*

*Je remercie également chaleureusement tous les membres du **laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation (LMAM)**, qui ont créé un environnement stimulant pour la recherche. Leur collaboration, leurs discussions et leur soutien ont été précieux.*

*Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance envers **mes parents et toute ma famille** pour leur amour, leurs encouragements constants, et leur soutien inconditionnel. Leur présence et leur soutien ont été ma source de force.*

Merci à touts pour avoir rendu cette réalisation possible. Je suis profondément reconnaissant envers chacun d'entre vous.

Résumé

Dans cette thèse, notre objectif principal est de développer un cadre analytique et numérique visant à définir le spectre quadratique généralisé des opérateurs bornés, qui est déjà défini pour les matrices. De plus, nous cherchons à étendre les recherches existantes sur le spectre généralisé de deux opérateurs bornés et son application dans l'approximation du spectre d'opérateurs non bornés. Cette généralisation est essentielle pour la création de la méthode du spectre quadratique généralisé, visant à résoudre le problème de la pollution spectrale, un phénomène couramment observé dans l'approximation spectrale des opérateurs non bornés. Ces opérateurs sont utilisés pour modéliser mathématiquement de nombreux problèmes dans divers domaines tels que la physique, la chimie, la mécanique quantique, l'optique, le traitement du signal, l'électromagnétisme, l'informatique et l'informatique quantique.

Les mots clés : Pollution spectrale, Spectre quadratique généralisé, Propriété U, Propriété L, Opérateur de Schrödinger, Opérateur borné.

Classification Mathématique des Sujets (2010) : 35P15, 47A75, 35J10.

Abstract

In this thesis, our main objective is to develop an analytical and numerical framework to define the generalized quadratic spectrum of bounded operators, a concept already established for matrices. Furthermore, we aim to extend existing research on the generalized spectrum of two bounded operators and its application in approximating the spectrum of unbounded operators. This generalization is essential for the creation of the generalized quadratic spectrum method, designed to address the issue of spectral pollution, a phenomenon commonly observed in the spectral approximation of unbounded operators. These operators are used to mathematically model various problems in diverse fields such as physics, chemistry, quantum mechanics, optics, signal processing, electromagnetism, computer science, and quantum computing.

Key words : Spectral pollution, Generalized spectrum, Propriety U, Propriety L, Schrödinger operator, Bounded operator.

Mathematical Subject Classification (2010) : 35P15, 47A75, 35J10.

ملخص

تهدف هذه الاطروحة الى وضع وتطوير إطار تحليلي وعددي يهدف إلى تحديد الطيف التربيعي المعمم للمؤثرات المحددة، والذي قمنا بتعريفه وتوسيع مفهومه بالنسبة للمصفوفات. علاوة على ذلك، فإننا نسعى إلى توسيع نطاق البحث الحالي حول الطيف المعمم للمؤثرات المحدودة وتطبيقه في تقريب طيف المؤثر الغير محدود. ويعد هذا التعميم ضروريًا لإنشاء طريقة الطيف التربيعي المعمم، التي تهدف إلى حل مشكلة التلوث الطيفي، وهي ظاهرة شائعة في التقريب الطيفي للمؤثرات الغير محدودة.

نذكر أن دراسة هذه العوامل تُستخدم لنمذجة العديد من المشكلات المختلفة المتعلقة بميادين الفيزياء والكيمياء وميكانيكا الكم والبصريات ومعالجة الإشارات والكهرومغناطيسية وعلوم الكمبيوتر والحوسبة الكمومية.

الكلمات المفتاحية: المؤثرات الطيفية، التلوث الطيفي، الطيف التربيعي المعمم،

الخاصية « U » ، الخاصية « L » ، مؤثرات شرودنجر.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction Générale

1.1 Historique de la théorie spectrale

L'histoire de la théorie spectrale remonte aux 18e et 19e siècles, et elle a évolué de manière complexe au fil du temps. Au 18e siècle, des mathématiciens comme Leonhard Euler et Joseph Louis Lagrange ont commencé à explorer les valeurs propres d'opérateurs linéaires, en se concentrant principalement sur des opérateurs différentiels. Au début du 19e siècle, Joseph Fourier a apporté d'importantes contributions en développant la série de Fourier pour analyser les signaux périodiques. La théorie spectrale a été appliquée à la résolution d'équations différentielles par des mathématiciens comme Augustin-Louis Cauchy et Jean-Baptiste Joseph Fourier, qui ont introduit des opérateurs différentiels pour étudier les modes de vibration des cordes et des plaques.

Au milieu du 19e siècle, le mathématicien allemand Peter Gustav Lejeune Dirichlet a joué un rôle majeur en étudiant les problèmes aux valeurs propres pour les équations aux dérivées partielles, formulé des conditions aux limites portant son nom (conditions de Dirichlet). Au tournant du 20e siècle, David Hilbert a développé les espaces de Hilbert, qui sont essentiels en théorie spectrale et en mécanique quantique.

Cette dernière a émergé au début du 20e siècle, avec des mathématiciens tels qu'Erwin Schrödinger et Werner Heisenberg utilisant la théorie spectrale pour formuler les équations de la mécanique quantique et comprendre les propriétés spectrales des opérateurs d'observable.

La théorie spectrale s'est continuellement développée au 20e siècle, avec des contributions importantes de mathématiciens comme John von Neumann. Elle a donné naissance à des concepts tels que le spectre discret, le spectre essentiel et le spectre singulier. Elle a également trouvé des applications étendues dans la physique, la théorie des équations aux dérivées partielles, l'analyse fonctionnelle et l'ingénierie.

Aujourd'hui, la théorie spectrale est un domaine mathématique essentiel qui s'applique dans de nombreux domaines, allant de la physique à l'informatique quantique, en passant par l'ingénierie. Elle continue de se développer avec de nouvelles découvertes et applications. Elle joue un rôle crucial dans l'analyse de systèmes complexes et périodiques, en extrayant des informations sur les fréquences, les énergies et les modes de vibration.

1.2 Applications de la théorie spectrale

La théorie spectrale trouve des applications diverses, telles que en mécanique quantique pour comprendre les opérateurs d'observable, en optique pour l'analyse de spectres lumineux, en ingénierie pour le traitement du signal et l'étude des ondes électromagnétiques, en informatique pour l'analyse de données et les algorithmes quantiques, en chimie pour la spectroscopie, en économie et finance pour l'analyse des séries temporelles, et en biologie pour l'analyse de signaux biologiques. Le calcul du spectre d'un opérateur, en tant qu'application de la théorie spectrale, représente un puissant outil mathématique ayant des applications dans divers domaines. Il fournit des informations cruciales sur les propriétés spectrales des systèmes étudiés, jouant un rôle essentiel dans la compréhension, l'analyse, la modélisation et l'optimisation de systèmes complexes dans des domaines aussi variés que :

Mathématiques : En analyse fonctionnelle, le calcul du spectre d'un opérateur est essentiel pour comprendre les propriétés des opérateurs linéaires, y compris leur compacité, leur inversibilité et la structure de leur spectre.

Physique : En mécanique quantique, le calcul du spectre de l'opérateur hamiltonien est crucial pour déterminer les niveaux d'énergie possibles d'un système quantique, ce qui est essentiel pour comprendre le comportement des particules subatomiques.

Ingénierie : Dans le domaine de l'ingénierie mécanique, le calcul du spectre d'un opérateur différentiel lié à un système mécanique permet d'analyser les modes de vibration, d'identifier les fréquences naturelles du système et de concevoir des systèmes anti-vibrations.

Économie et finance : Dans la théorie des jeux, le calcul du spectre est utilisé pour analyser les stratégies et les équilibres dans des jeux à somme nulle, ce qui facilite la prise de décisions rationnelles dans des scénarios de négociation, d'enchères et de conflits.

Géophysique : En sismologie, le calcul du spectre des opérateurs géophysiques permet de caractériser les propriétés des ondes sismiques, de détecter des structures géologiques souterraines, des tremblements de terre et des mouvements de plaques tectoniques.

Informatique quantique : Le calcul du spectre des opérateurs est essentiel en informatique quantique pour la conception d'algorithmes quantiques, notamment pour la factorisation d'entiers et la recherche quantique.

Chimie : Dans le domaine de la spectroscopie, le calcul du spectre d'un opérateur quan-

tique permet de déterminer les transitions énergétiques et les niveaux d'énergie des molécules, ce qui est crucial pour l'identification de substances chimiques et l'étude des réactions chimiques.

Optique : En optique quantique, le calcul du spectre des opérateurs optiques est utilisé pour analyser la propagation de la lumière et la manipulation des états quantiques de la lumière.

Biologie : En biophysique, le calcul du spectre d'opérateurs est employé pour analyser les propriétés des réseaux neuronaux et des systèmes biologiques complexes, ce qui peut contribuer à la compréhension du fonctionnement du cerveau et des cellules.

1.3 Approximation du spectre et pollution spectrale

Le calcul du spectre de la plupart des opérateurs non bornés, qui servent de modélisation mathématique à des problèmes réels dans les domaines mentionnés précédemment, est souvent complexe et parfois presque impossible. C'est pourquoi les chercheurs ont recours à l'approximation du spectre pour obtenir des valeurs approximatives.

L'approximation du spectre d'un opérateur non borné consiste à restreindre l'opérateur à un sous-espace de dimension finie, généralement en introduisant des conditions aux limites appropriées. Cette approche permet de travailler avec des opérateurs bornés, dont le spectre est plus facile à gérer mathématiquement.

Cependant, l'utilisation de l'approximation du spectre d'un opérateur non borné peut entraîner un phénomène appelé pollution spectrale. Ce phénomène se produit lorsque l'approximation inclut des valeurs propres qui ne font pas partie du spectre propre de l'opérateur non borné, désignées comme valeurs propres parasites ou artificielles.

La pollution spectrale découle généralement des conditions aux limites ou des approximations utilisées pour restreindre l'opérateur non borné. Des conditions aux limites inappropriées ou des approximations grossières peuvent introduire des valeurs propres parasites qui ne correspondent pas aux propriétés physiques du système.

Les techniques d'approximation du spectre d'un opérateur non borné varient en fonction du contexte. Certaines approches courantes incluent l'utilisation de séries de Fourier, de la théorie des perturbations, de la méthode des différences finies, de la méthode des éléments

finis et de la méthode de projection.

Le phénomène de pollution spectrale constitue un problème récurrent dans l'approximation du spectre d'un opérateur non borné. Il survient lorsque des approximations numériques, telles que des méthodes de discrétisation ou de projection, introduisent des valeurs propres fausses ou indésirables dans le spectre approximatif de l'opérateur, ce qui peut affecter la précision des calculs et la convergence des approximations numériques.

1.4 Problèmes spectraux

Les problèmes concrets dans les divers domaines mentionnés précédemment trouvent principalement leur solution grâce à l'étude des problèmes spectraux résultant de leur modélisation mathématique. Ces problèmes spectraux peuvent être regroupés en différentes catégories en fonction de leurs caractéristiques. Voici quelques-unes des catégories courantes de problèmes spectraux :

Problème spectral standard : Il s'agit du problème de base où l'objectif est de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice ou le spectre d'un opérateur linéaire donné. Cela consiste à résoudre l'équation suivante :

$$\text{Trouver } (\lambda, x),\ x \neq 0,\ Ax = \lambda x$$

où A peut être considéré comme une matrice, un opérateur borné ou un opérateur non borné.

Ce problème a été traité dans le cadre d'une théorie spectrale classique, présentée en détail par Ahues et ses collaborateurs dans [1]. Dans ce document, les auteurs construisent une approximation de rang fini de A, transformant ainsi le problème initial $Ax = \lambda x$ en un problème aux valeurs propres matricielle. Ils démontrent ensuite que la convergence de A_n vers A en norme, en collectivement compact et en $\nu-$convergence résout le problème de la pollution spectrale, établissant ainsi une approche numérique stable.

Dans un autre contexte, les auteurs des références [16], [18], [10] et [17] ont abordé le problème de la pollution spectrale qui survient dans la résolution d'un problème spectral standard associé à un opérateur non borné A.

Dans ces travaux, les auteurs étudient un autre type de problème, à savoir

le problème spectral généralisé, qui cherche à résoudre un problème spectral impliquant simultanément deux opérateurs ou matrices. Les valeurs propres et les vecteurs propres

sont déterminés pour deux opérateurs liés, et le problème est formulé comme suit :

$$\text{Trouver } (\lambda, x),\ x \neq 0,\ Tx = \lambda Sx,$$

où T et S peuvent être considérés comme des matrices ou des opérateurs, qu'ils soient bornés ou non bornés.

Ils démontrent que le spectre d'un opérateur non borné est égal au spectre généralisé de deux opérateurs bornés de la forme suivante :

$$\text{sp}(A) = \text{sp}(T, S),$$

où, A est un opérateur non borné, T, S sont deux opérateurs bornés et les ensembles $\text{sp}(A)$, $\text{sp}(T, S)$ représentent respectivement le spectre de l'opérateur A et le spectre généralisé du couple (T, S). Ces derniers sont donnés par

$$\text{sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, A - \lambda I \text{ n'est pas inversible } \},$$

et

$$\text{sp}(T, S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, T - \lambda S \text{ n'est pas inversible } \}.$$

Les auteurs dans [10], [16], [18] ont étudié le problème spectral généralisé $Tx = \lambda Sx$ et ont démontré la convergence du spectre généralisé $\text{sp}(T_n, S_n)$ dans le cas de la convergence des suites T_n et S_n vers T et S en norme [10], et en collectivement compacte [16], [18]. Tout cela est reconnu sous le nom de réalisation de la propriété U [1]. L'obtention de cette propriété montre que la pollution spectrale n'a pas de place dans ce type de problème.

Le troisième type de problème est le **Problème spectral quadratique**, impliquant la résolution d'équations quadratiques en termes de valeurs spectrales. Ils sont définis par l'équation suivante :

$$\text{Trouver } (\lambda, x),\ x \neq 0,\ \lambda^2 Ax + \lambda Bx + Cx = 0,$$

où A, B et C peuvent être des matrices, des opérateurs bornés ou des opérateurs non bornés.

Ce type de problème occupe une place centrale dans la modélisation mathématique et est au coeur de nombreuses applications nécessitant la résolution de ce genre de problème, notamment dans le domaine de l'analyse dynamique des systèmes mécaniques et acoustiques,

la simulation de circuits électriques, la mécanique des fluides, ainsi que dans la modélisation de systèmes mécaniques microélectroniques.

Ces problèmes ont attiré beaucoup d'attention dans divers domaines de la modélisation mathématique, tels que l'analyse dynamique des systèmes mécaniques en acoustique, la stabilité linéaire de l'écoulement en mécanique des fluides et la généralisation à la dimension infinie du problème du transistor (voir [12], [26]).

Ces problèmes sont connus sous le nom de problèmes des valeurs propres quadratiques dans le cas où A, B et C sont des matrices, comme étudié dans [6], [12], et [26].

Notons également que la résolution d'un problème des valeurs propres quadratiques joue un rôle très important dans la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre telle que

$$Mq''(t) + Cq'(t) + Kq(t) = f(t),$$

où, M, C et K sont des matrices $n \times n$ et $q(t)$ est un vecteur d'ordre n à déterminer. Cette équation illustre, dans le domaine des oscillations mécaniques, un système à ressort et masse unique (Figure 1) dans lequel un bloc rigide de masse M repose sur des rouleaux et ne peut se déplacer que par une simple translation. La résistance (statique) au déplacement est fournie par un ressort de raideur K, tandis que le mécanisme de perte d'énergie (dynamique) est représenté par un amortisseur C ; $f(t)$ représente une force externe.

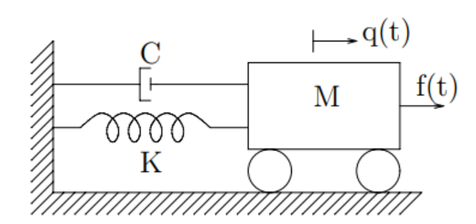


Figure 1.1 – Système à masse unique-ressort.

Dans le domaine de l'électricité, une équation différentielle linéaire du second ordre peut représenter l'écoulement du courant électrique dans un circuit RLC simple composé d'une bobine d'inductance L, d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C, comme illustré dans la Figure 2 ; $E(t)$ est la tension d'entrée.

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

où $i(t)$ est le courant à travers la résistance, et t est le temps écoulé.

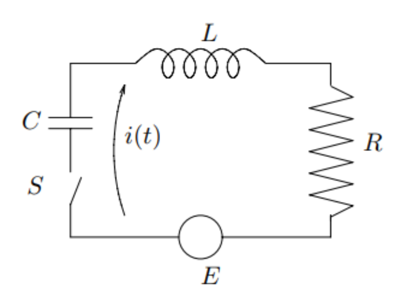


FIGURE 1.2 – Un circuit électrique simple.

De même, dans un cas particulier, ces problèmes conduisent à l'étude des propriétés spectrales du pencil quadratique de différents opérateurs non bornés, tels que le pencil quadratique de l'opérateur de Schrödinger [3] et de l'opérateur de Sturm-Liouville [20], représenté par le problème différentiel suivant :

$$L_{p,q}y = -y'' + [q(x) + 2\lambda p(x)]y = \lambda^2 y, \tag{1.1}$$

avec les conditions aux limites

$$y(0, \lambda) = 1, \ \ y'(0, \lambda) = 0,$$
$$y'(\pi, \lambda) + Hy(\pi, \lambda) = 0,$$

où, $p(x), q(x) \in L^2[0, p]$.

Ce type de problème est connu dans la littérature sous le nom de problème de diffusion. De même, il décrit les interactions entre les particules lors d'une collision et présente un intérêt fondamental en physique [20].

1.5 Position du problème

Dans notre travail, nous nous penchons sur le problème spectral quadratique associé à trois opérateurs linéaires bornés, formulé comme suit :

$$\text{Trouver } (\lambda, x), \ x \neq 0, \ \lambda^2 Ax + \lambda Bx + Cx = 0.$$

Ici, A, B et C sont trois opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ dans lui-même, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ comme valeur spectrale.

Notre objectif principal est de démontrer l'absence de pollution spectrale dans l'approximation du spectre quadratique généralisé de trois opérateurs bornés. Nous cherchons également à développer une nouvelle méthode numérique visant à minimiser et éviter la pollution spectrale lors de l'approximation de problèmes spectraux quadratiques, en particulier dans le cas des opérateurs non bornés.

Considérons les suites d'opérateurs linéaires bornés A_n, B_n et C_n convergeant respectivement vers A, B et C d'une certaine manière. Deux questions essentielles se posent naturellement :

- Si $\lambda_n \in \mathrm{sp}(A_n, B_n, C_n)$ et $\lambda_n \to \lambda$, est-ce que $\lambda \in \mathrm{sp}(A, B, C)$?
- Si $\lambda \in \mathrm{sp}(A, B, C)$, existe-t-il $\lambda_n \in \mathrm{sp}(A_n, B_n, C_n)$ pour chaque grand n tel que $\lambda_n \to \lambda$?

La réponse négative à la première question définit la notion de la pollution spectrale. En revanche, la réponse négative à la deuxième question montre que le spectre n'atteint pas sa totalité.

Notre objectif à travers cette thèse est de rechercher les modes de convergence de A_n, B_n et C_n vers A, B et C, qui permettent d'obtenir une réponse positive à ces questions. Cela nous permettrait de conclure que les deux propriétés suivantes sont réalisées, résolvant ainsi le phénomène de la pollution spectrale et montrant que le spectre sera atteint dans sa totalité dans notre cas :

La propriété U est vérifiée si A_n, B_n et C_n convergent respectivement vers A, B et C dans un sens donné, $\lambda_n \in \mathrm{sp}(A_n, B_n, C_n)$ et $\lambda_n \to \lambda$. Alors $\lambda \in \mathrm{sp}(A, B, C)$.

La propriété L est vérifiée si A_n, B_n et C_n convergent respectivement vers A, B et C dans un sens donné, et que $\lambda \in \mathrm{sp}(A, B, C)$. Il existe un certain $\lambda_n \in \mathrm{sp}(A_n, B_n, C_n)$ pour chaque n suffisamment grand, de telle sorte que $\lambda_n \to \lambda$.

1.6 Plan de la thèse

Notre thèse se divise en trois chapitres essentiels. Le premier chapitre sert de fondement et introduit des concepts préliminaires importants pour la compréhension des chapitres suivants. Ces concepts comprennent un rappel du spectre généralisé et des résultats obtenus lors de l'approximation du spectre généralisé. De plus, nous présentons quelques notions et résultats relatifs au spectre quadratique généralisé, établissant ainsi le cadre de notre étude dans les

chapitres ultérieurs.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la méthode d'approximation du spectre quadratique généralisé. Nous examinons la démonstration des propriétés U et L, où les suites d'opérateurs A_n, B_n et C_n convergent en norme et collectivement compacte vers les opérateurs bornés A, B et C, respectivement. Un élément crucial de notre travail consiste à développer une extension de la notion de convergence classique v pour démontrer la propriété U associée aux opérateurs A, B, et $I + D$.

Dans le dernier chapitre, nous appliquons la méthode du spectre quadratique généralisé au problème de l'opérateur de Schrödinger sous forme de pencil quadratique, afin de résoudre le problème de pollution spectrale qui se pose lors de l'approximation de ce type d'opérateurs non bornés. De plus, nous réalisons des tests numériques pour valider l'efficacité de notre méthode.

Chapitre 2

Spectre généralisé et spectre quadratique généralisé

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'introduction des fondements théoriques utilisés dans le traitement du spectre quadratique généralisé, associé aux trois opérateurs linéaires bornés, ce qui va nous permettre de developper une nouvelle méthode d'approximation du spectre quadratique généralisé. Aussi, ils servent à assurer la convergence de cette nouvelle méthode moyennant des hypothèses appropriées.

Ce chapitre est organisé selon le schéma suivant :

Un rappel sur les résultats obtenus dans [19], concernant le spectre généralisé associé aux opérateurs bornés ; puis nous présentons une étude réalisée sur le spectre généralisé avec un nouveau mode de convergence appelé $\nu-$convergence généralisée.

Ensuite, nous introduisons les nouvelles notions du spectre associé aux trois opérateurs linéaires bornés, où ces notions sont déjà initialement définies pour trois matrices [26].

Enfin, nous donnons les propriétés du spectre quadratique généralisé et de la résolvante quadratique généralisé, où ces propriétés sont la généralisations des concepts théoriques des cas classique et généralisé [1], [10], [11], [16], [18], [17] puis pour terminer avec une étude de la différentiabilité de la résolvante quadratique généralisé au sens de Fréchet qui va nous permettre de montrer des propriétés plus régulières de l'opérateur résolvant par rapport à celles obtenues dans [13], [14], [15].

2.2 Rappel de quelques notions et résultats sur le spectre généralisé

Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ un espace de Banach. On considère l'espace noté $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$ qui est l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$, i.e.

$$\mathrm{BL}(\mathcal{B}) = \{T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \ \ T \text{ linéaire borné}\}. \tag{2.1}$$

On munit cet espace de la norme notée $\|\cdot\|$ définie, pour $T \in \mathrm{BL}(\mathcal{B})$, par

$$\|T\| = \sup\{\|Tu\|_{\mathcal{B}} : u \in \mathcal{B}, \ \|u\|_{\mathcal{B}} = 1\}. \tag{2.2}$$

Définition 2.2.1

Soient T et S deux opérateurs dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$.

1. *On appelle problème du spectre généralisé, le problème donné par*

$$\textit{Trouver } \lambda \in \mathbb{C} \textit{ et } u \in \mathcal{B} - \{0\} \textit{ tel que } Tu = \lambda S u. \tag{2.3}$$

2. *On appelle spectre généralisé des opérateurs T et S, l'ensemble noté* $\mathrm{sp}(T, S)$ *défini par*

$$\mathrm{sp}(T, S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, T - \lambda S \textit{ n'est pas inversible } \}. \tag{2.4}$$

3. *On appelle ensemble résolvant généralisé des opérateurs T et S l'ensemble noté* $\mathrm{re}(T, S)$*, défini par*

$$\mathrm{re}(T, S) = \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(T, S). \tag{2.5}$$

4. *On appelle spectre ponctuel généralisé des opérateurs T et S, l'ensemble noté* $\mathrm{sp}_p(T, S)$ *défini par*

$$\mathrm{sp}_p(T, S) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \exists u \in \mathcal{B} \setminus \{0\},\ \ Tu = \lambda S u\}. \tag{2.6}$$

5. *On appelle opérateur résolvant généralisé de (T, S) en z noté* $\mathrm{R}(z, T, S)$*, la fonction défini par*

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\cdot, T, S) : \mathrm{re}(T, S) \subset \mathbb{C} &\to \mathrm{BL}(\mathcal{B}) \\ z &\mapsto \mathrm{R}(z, T, S) = (T - zS)^{-1}, \end{aligned}$$

6. *On appelle élément spectral généralisé isolé, tout élément λ dans* $\mathrm{sp}(T, S)$*, tel qu'il existe une courbe dans* $\mathrm{re}(T, S)$ *notée Γ et appelée contour de Cauchy, et*

$$\lambda \in \mathrm{int}(\Gamma), \tag{2.7}$$

avec la condition

$$\mathrm{int}(\Gamma) \cap \mathrm{sp}(T, S) \setminus \{\lambda\} = \emptyset, \tag{2.8}$$

où $\mathrm{int}(\Gamma)$ *désigne l'intérieur du contour de Cauchy* Γ.

Les deux théorèmes suivants servent à introduire les outils fondamentaux, pour l'étude du spectre généralisé et la mise en relief de quelques propriétés essentielles, à savoir que l'ensemble du spectre généralisé est fermé et que la résolvante généralisé est analytique.

Théorème 2.2.1

Soient T et S deux opérateurs linéaires bornés, $T, S \in \mathrm{BL}(\mathcal{B})$. On a alors les résultats suivants :

1. *Soit z appartenant à l'ensemble résolvant généralisé $\mathrm{re}(T,S)$ et soit z_0 appartenant à $\mathbb{C}$.*

$$Si\, |z - z_0| < \|\mathrm{R}(z,T,S)S\|^{-1}, \tag{2.9}$$

   alors, $z_0 \in \mathrm{re}(T,S)$.

2. *Le spectre généralisé $\mathrm{sp}(T,S)$ est un ensemble fermé de $\mathbb{C}$.*

3. *La fonction résolvante $\mathrm{R}(\cdot,T,S) : \mathrm{re}(T,S) \to \mathrm{BL}(\mathcal{B})$ est analytique et sa dérivée par rapport à z vérifie la relation :*

$$\frac{d\,\mathrm{R}}{dz}(z,T,S) = \mathrm{R}(z,T,S)S\,\mathrm{R}(z,T,S). \tag{2.10}$$

4. *Soient $T, S, \tilde{T}, \tilde{S}$ dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$, et $z \in \mathrm{re}(T,S)$.*

   Si les deux inégalités (2.11) et (2.12) ci-dessous sont vérifiées

$$\left\|\Big((\tilde{T} - T) - z(\tilde{S} - S)\Big)\,\mathrm{R}(z,T,S)\right\| < 1, \tag{2.11}$$

   où

$$\left\|\Big[\Big((\tilde{T} - T) - z(\tilde{S} - S)\Big)\,\mathrm{R}(z,T,S)\Big]^2\right\| < 1, \tag{2.12}$$

   alors z est dans l'ensemble résolvant de $\tilde{T}$ et $\tilde{S}$ ($z \in \mathrm{re}(\tilde{T}, \tilde{S})$).

Preuve. Voir [19].

Théorème 2.2.2

Considérons deux opérateurs bornés T et S, $T, S \in \mathrm{BL}(\mathcal{B})$. Soit $B(0,k)$ la boule de centre 0

et de rayon $k > 0$.

On a alors les assertions suivantes :

1. *L'ensemble du spectre généralisé* $\mathrm{sp}(T, S)$ *est un sous- ensemble de la boule* $B(0, k)$*, si et seulement si,* 0 *n'est pas un élément du spectre de* S*, i.e.*

$$\mathrm{sp}(T, S) \subset B(0, k) \Leftrightarrow 0 \notin \mathrm{sp}(S). \tag{2.13}$$

2. *Si l'opérateur* S *est compact, alors le spectre généralisé* $\mathrm{sp}(T, S)$ *est la réunion du spectre ponctuel généralisé* $\mathrm{sp}_p(T, S)$ *et l'infini, i.e.*

$$\mathrm{sp}(T, S) = \mathrm{sp}_p(T, S) \cup \{\infty\}. \tag{2.14}$$

Preuve. Voir [19].

Le théorème suivant carctérise l'existence de l'opérateur projection.

Théorème 2.2.3

Soit λ *une valeur propre généralisée de type fini et isolée, dans le spectre généralisé* $\mathrm{sp}(T, S)$*. Si* Γ *désigne le contour de Cauchy qui sépare* λ *de* $\mathrm{sp}(T, S)$*, alors l'opérateur*

$$P = \frac{-1}{2i\pi} \int_\Gamma (T - zS)^{-1} S \, dz, \tag{2.15}$$

est une projection, i.e. $P^2 = P$*.*

Preuve. Voir [19].

2.3 Approximation du spectre généralisé

Dans cette section, nous présentons un schéma pour l'approximation du spectre généralisé, Ensuite, nous énonçons les principaux résultats, qui assurent la convergence de la nouvelle méthode du spectre généralisé, sous des hypothèses appropriées.

Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'opérateurs linéaires bornés, qui convergent dans un sens précis vers les opérateurs bornés T et S respectivement. Alors, pour déterminer la relation entre $\mathrm{sp}(T, S)$ et $\mathrm{sp}(T_n, S_n)$ (pour n assez grand), nous considérons le schéma d'approximation spectrale élaboré à travers les propriétés suivantes :

Propriété U : Si $\lambda_n \in \mathrm{sp}(T_n, S_n)$ et $\lambda_n \to \lambda$ dans $\mathbb{C}$, alors $\lambda \in sp(T, S)$.

Propriété L : Si $\lambda \in sp(T, S)$, alors il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lambda_n \to \lambda$ dans $\mathbb{C}$ et $\lambda_n \in \mathrm{sp}(T_n, S_n)$.

Remarque 2.3.1

1. *Notons que la Propriété U et la Propriété L sont les extensions naturelles du cas standard* $S = I$, $T \in \mathrm{BL}(\mathcal{B})$ *et* I *est l'opérateur identité dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$ *(voir [1], [19]).*

2. *Pour clarifier la notion du "sens précis" de la convergence, nous citons quelques modes de convergence usuelles :*
   – *La convergence ponctuelle, notée* $T_n \xrightarrow{p} T$*, telle que*
   $$\textit{Pour tout } x \in \mathcal{B}, \ \ \| T_n x - T x \|_{\mathcal{B}} \to 0.$$
   – *La convergence en norme, notée* $T_n \xrightarrow{n} T$*, telle que*
   $$\| T_n - T \| \to 0.$$
   – *La convergence en collectivement compact, notée* $T_n \xrightarrow{cc} T$*, vérifiant*
   $$T_n \xrightarrow{p} T$$
   et pour un certain nombre entier positif n_0
   $$\bigcup_{n\geq n_0} \{T_n x - T x \ : x \in \mathcal{B}, \ \|x\|_{\mathcal{B}} \leq 1\}$$
   est relativement compact dans $\mathcal{B}$.
   – *La* $\nu -$ *convergence, notée* $T_n \xrightarrow{\nu} T$*, définie par*
   $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$, *et on a les convergences en norme*
   $$\|(T_n - T)T\| \to 0 \ \ \textit{et} \ \ \|(T_n - T)T_n\| \to 0.$$

Dans toute la suite, on montre que le schéma de la convergence du spectre généralisé est obtenu à l'aide des propriétés U et L, en faisant appel à la convergence en norme et en collectivement compact.

Théorème 2.3.1

Soient $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'opérateurs bornés. Si les opérateurs* T_n *et* S_n *vérifient l'une des hypothèses suivantes :*

$(\mathcal{A}1)$ $T_n \xrightarrow{n} T$, $S_n \xrightarrow{n} S$. *(convergence en norme)*

$(\mathcal{A}2)$ $T_n \xrightarrow{cc} T$, $S_n \xrightarrow{cc} S$. *(convergence en collectivement compact)*

et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \in \mathrm{sp}(T_n, S_n)$ *et* λ_n *converge vers* λ *dans* $\mathbb{C}$, *alors* $\lambda \in \mathrm{sp}(T, S)$.

Preuve. Voir [19].

Théorème 2.3.2

Si les suites d'opérateurs $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifient l'une des hypothèses suivantes :*

$(\mathcal{A}1)$ $T_n \xrightarrow{n} T$, $S_n \xrightarrow{n} S$.

$(\mathcal{A}2)$ $T_n \xrightarrow{cc} T$, $S_n \xrightarrow{cc} S$.

et si λ *est une valeur propre généralisée isolée de type fini dans* $\mathrm{sp}(T, S)$, *alors il existe une suite* $\lambda_n \in \mathrm{sp}(T_n, S_n)$ *telle que* λ_n *converge vers* λ *dans* $\mathbb{C}$.

Preuve. Voir [19].

Dans le but d'améliorer et d'affaiblir les hypothèses du théorème 2.3.1 et du théorème 2.3.2, nous allons introduire un nouveau type de convergence plus faible que les autres modes de convergences utilisés dans [19], [17].

Nous appelons ce type de convergence la $\nu-$convergence généralisée associée aux opérateurs T_n et S_n . Cette $\nu-$ convergence généralisée est définie de la manière suivante :

On dit que (T_n, S_n) converge vers (T, S) en $\nu-$ convergence généralisée et on note $(T_n, S_n) \xrightarrow{\nu_g} (T, S)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

– $\|T_n\|$ et $\|S_n\|$ sont bornés pour tout n, on a alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \|T_n\| < \infty \text{ et } \|S_n\| < \infty. \tag{2.16}$$

– Les quantités suivantes doient être tendre vers 0 lorsque $n \to \infty$

$$\|(T_n - T)\,T_n\| = \|(T_n - T)\,S_n\| = \|(S_n - S)\,S_n\| = \|(S_n - S)\,T_n\| \to 0 \qquad (2.17)$$

$$\|(T_n - T)\,T\| = \|(T_n - T)\,S\| = \|(S_n - S)\,S\| = \|(S_n - S)\,T\| \to 0. \qquad (2.18)$$

Dans toute la suite, nous allons traiter le spectre généralisé $\mathrm{sp}(T, S)$, avec $T = I + G$ où I est l'identité, S, G sont deux opérateurs bornés, $S, G \in \mathrm{BL}(\mathcal{B})$. De même, le problème spectrale généralisé (2.3) s'écrit

$$\text{Trouver } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } u \in \mathcal{B}\backslash\{0\} \text{ tel que } (I + G)u = \lambda S u. \qquad (2.19)$$

Le problème (2.19) sera traité en adoptant la $\nu -$ convergence généralisée.

Remarque 2.3.2

Les résultats de cette nouvelle approche du problème du spectre généralisée à l'aide de la $\nu -$ convergence généralisé a fait l'objet d'une publication, (voir[14]).

Les résultats essentiels du traitement de notre problème spectrale généralisé (2.19) sont illustrés à travers les deux théorèmes ci dessous, où la propriété U a été prouvée sous la $\nu -$ convergence généralisée.

Proposition 2.3.1

Soient G et S dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$.

(a) *Pour z_1 et z_2 appartenant à l'ensemble résolvant* $\mathrm{re}(I + G, S)$, *on a alors*

$$\mathrm{R}(z_1) - \mathrm{R}(z_2) = (z_1 - z_2)\,\mathrm{R}(z_1) S\,\mathrm{R}(z_2). \qquad (2.20)$$

(b) *Pour $z \in \mathrm{re}(I + G, S)$, on a alors*

$$\mathrm{R}(z) = I - G\,\mathrm{R}(z) + zS\,\mathrm{R}(z). \qquad (2.21)$$

(c) *S'il existe $z_0 \in \mathrm{re}(I + G, S)$, tel que l'opérateur G commute avec l'opérateur resolvant généralisé au point z_0 $\mathrm{R}(z_0)$,i.e.*

$$G\,\mathrm{R}(z_0) = \mathrm{R}(z_0) G \qquad (2.22)$$

alors

(c.1) *Pour tout* z_1 *et* $z_2 \in \mathrm{re}(I+G,S)$, *l'opérateur* $\mathrm{R}(z_1)$ *commute avec l'opérateur* $\mathrm{R}(z_2)$, $\mathrm{R}(z_2), i.e. Rp(z_1) = \mathrm{R}(z_1)\,\mathrm{R}(z_2)$.

(c.2) *Pour tout* $z \in \mathrm{re}(I+G,S)$, *les opérateurs* G, S *commutent avec l'opérateur* $\mathrm{R}(z)$.

Preuve.

Soient S et G deux opérateurs dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$.

(a) Soient z_1, z_2 deux élément de l'ensemble résolvant quadratique généralisé $\mathrm{re}(I+G,S)$.

On écrit

$$\mathrm{R}(z_1) - \mathrm{R}(z_2) = (I+G-z_1S)^{-1} - (I+G-z_2S)^{-1} \tag{2.23}$$

On met $\mathrm{R}(z_1)$ comme facteur commun, pour obtenir

$$\mathrm{R}(z_1) - \mathrm{R}(z_2) = \mathrm{R}(z_1)\left[I - (I+G-z_1S)\,\mathrm{R}(z_2)\right].$$

De plus, on met $\mathrm{R}(z_2)$ comme facteur commun, et on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(z_1) - \mathrm{R}(z_2) &= \mathrm{R}(z_1)\left[(I+G-z_2S) - (I+G-z_1S)\right]\mathrm{R}(z_2) \\ &= (z_1 - z_2)\,\mathrm{R}(z_1)S\,\mathrm{R}(z_2).\end{aligned}$$

Ceci montre le cas **(a)** du théorème.

(b) Pour $z \in \mathrm{re}(I+G,S)$, on peut écrire l'opérateur identité par la formule suivante :

$$I = (I+G-zS)\,\mathrm{R}(z) = \mathrm{R}(z) + G\,\mathrm{R}(z) - zS\,\mathrm{R}(z),$$

ce qui permet d'écrire l'opérateur $\mathrm{R}(z)$ comme suit

$$\mathrm{R}(z) = I - G\,\mathrm{R}(z) + zS\,\mathrm{R}(z). \tag{2.24}$$

Cela prouve **(b)** du théorème.

(c) Soit $z_0 \in \mathrm{re}(I+G,S)$.

(c.1) Soient z_1 et z_2 deux éléments de $\mathrm{re}(I+G,S)$. Comme $\mathrm{R}(z_1)$ commute avec S et G, alors, on peut écrire

$$\mathrm{R}(z_1)\left[I+G-z_2S\right] = \left[I+G-z_2S\right]\mathrm{R}(z_1)$$

En multipliant par $\mathrm{R}(z_2)$ à droite et à gauche, on obtient

$$\mathrm{R}(z_2)\,\mathrm{R}(z_1) = \mathrm{R}(z_1)\,\mathrm{R}(z_2).$$

Par conséquent, **(c.1)** est vérifiée.

(c.2) En utilisant le résultat obtenu dans **(a)**, pour tout $z \in \mathrm{re}(I+G,S)$, et pour $z_0 \in \mathrm{re}(I+G,S)$, on montre que les opérateurs S et G commutent avec $\mathrm{R}(z)$.

□

Le théorème suivant montre que la proprieté U est vérifiée pour la $\nu-$convergence généralisée.

Théorème 2.3.3

Soient G_n et S_n deux suites d'opérateurs bornés, et λ_n un élément du spectre généralisé $\mathrm{sp}(I+G_n,S_n)$, telle que le couple (G_n,S_n) converge selon la $\nu-$convergence généralisée, et $\lambda_n \to \lambda$ dans $\mathbb{C}$. Alors λ est un élément de $\mathrm{sp}(I+G,S)$.

Preuve.

La démonstration de ce théorème est basée sur le raisonnement par l'absurde. On suppose que $\lambda \in \mathrm{re}(I+G,S)$. Comme l'ensemble résolvant généralisé $\mathrm{re}(I+G,S)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$, alors il existe un scalaire $\delta > 0$ tel que

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-\lambda| \leq \delta\} \subset \mathrm{re}(I+G,S).$$

De plus, la résolvante généralisée $\mathrm{R}(\cdot)$ étant analytique sur l'ensemble $\mathrm{re}(I+G,S)$, on peut définir le nombre réel β par

$$\alpha = \sup\{\|\,\mathrm{R}(z)\| : z \in \Omega\} < \infty.$$

On cherche à montrer que l'ensemble Ω est inclus dans l'ensemble $\mathrm{re}(I+G_n,S_n)$. Pour cela, il suffit de prouver que pour tout $z \in \Omega$ on a $z \in \mathrm{re}(I+G_n,S_n)$, i.e. on montre que l'opérateur $\mathrm{R}_n(z) = (I+G_n-zS_n)^{-1}$ existe et est borné, pour tout $z \in \Omega$.

D'une part, on va développer le terme $[[(G-G_n)-z(S-S_n)]\,\mathrm{R}(z)]^2$, en utilisant l'inégalité présentée dans la proposition 2.3.1**(b)**, qui nous permet d'écrire $\mathrm{R}(z)$ sous la forme suivante :

$$\mathrm{R}(z) = I - G\,\mathrm{R}(z) + zS\,\mathrm{R}(z).$$

Cela donne

$$\begin{aligned} & [[(G-G_n)-z(S-S_n)]\,\mathrm{R}(z)]^2 \\ = & \ [(G-G_n)-z(S-S_n)]\,[I-G\,\mathrm{R_Q}(z)+zS\,\mathrm{R}(z)]\,[(G-G_n)-z(S-S_n)]\,\mathrm{R}(z) \\ = & \ [[(G-G_n)-z(S-S_n)]\,[(G-G_n)-z(S-S_n)]+[(G-G_n)-z(S-S_n)] \\ & \ [zS\,\mathrm{R_Q}(z)-G\,\mathrm{R_Q}(z)]\,[(G-G_n)-z(S-S_n)]]\,\mathrm{R}(z) \end{aligned}$$

et comme $\|G_n\|$ et $\|S_n\|$sont bornés, ils existent $t, s \geq 0$ tels que $\|G-G_n\| \leq t$ et $\|S-S_n\| \leq s$ pour $n \in \mathbb{N}$. D'après la convergence des opérateurs G_n et S_n en $\nu-$convergence généralisée, on a

$$\|\,(G_n-G)\,G_n\| = \|\,(S_n-S)\,G_n\| = \|\,(G_n-G)\,S_n\| = \|\,(S_n-S)\,S_n\| \to 0,$$

et

$$\|\,(G_n-G)\,G\| = \|\,(S_n-S)\,G\| = \|\,(G_n-G)\,S\| = \|\,(S_n-S)\,S\| \to 0.$$

Pour montrer que $\mathrm{R}_n(z) = (I+G_N-zS_n)^{-1}$ existe et est borné, on doit établir que

$$\left\|[[(G-G_n)-z(S-S_n)]\,\mathrm{R}(z)]^2\right\| < 1.$$

Par conséquent, pour tout $z \in \Omega$, on suppose qu'ils existent des entiers naturels $n_i,\ 1 \leq i \leq 8$ et $k = \max(t, s)$ vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}
\|(G_n - G)G\| &\leq \frac{1}{16\alpha(r + |(1+\lambda)\alpha k|)}, \quad n \geq n_1,\\
\|(G - G_n)S\| &\leq \frac{1}{16\alpha(r + |\lambda + (\lambda + \lambda^2)\alpha k|)}, \quad n \geq n_2,\\
\|(S - S_n)S\| &\leq \frac{1}{16\alpha(r + |\lambda^2 + (\lambda^2 + \lambda^3)\alpha k|)}, \quad n \geq n_3,\\
\|(S - S_n)G\| &\leq \frac{1}{16\alpha(r + |\lambda + (\lambda + \lambda^2)\alpha k|)}, \quad n \geq n_4,\\
\|(G_n - G)G_n\| &\leq \frac{1}{16\alpha}, \quad n \geq n_5,\\
\|(G - G_n)S_n\| &\leq \frac{1}{16\alpha(r + |\lambda|)}, \quad n \geq n_6,\\
\|(S - S_n)S_n\| &\leq \frac{1}{16\alpha(r + |\lambda|^2)}, \quad n \geq n_7,\\
\|(S - S_n)G_n\| &\leq \frac{1}{16\alpha(r + |\lambda|)}, \quad n \geq n_8,
\end{aligned}$$

Ceci nous permet de vérifier que

$$\left\| [[(G - G_n) - z(S - S_n)]\, \mathrm{R}(z)]^2 \right\| < 1,$$

et on a, pour tout $n \geq \max\{n_i, 1 \leq i \leq 8\}$,

$$\left\| [[(G - G_n) - z(S - S_n)]\, \mathrm{R}(z)]^2 \right\| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Alors

$$\mathrm{R}_n(z) = (I + G_n - zS_n)^{-1}$$

existe et est borné ; donc $z \in \mathrm{re}(I + G_n, S_n)$. Par conséquent, $\Omega \subset \mathrm{re}(I + G_n, S_n)$ pour tout n assez grand.

Comme la suite des valeurs spectrales approchées λ_n converge vers la valeur exacte λ, on a $\lambda_n \in \Omega \subset \mathrm{re}(I + G_n, S_n)$ pour tout n. On a aussi $\lambda_n \in \mathrm{sp}(I + G_n, S_n)$ pour tout n, et donc λ doit être dans $\mathrm{sp}(I + G, S)$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ que λ n'est pas dans $\mathrm{sp}(I + G, S)$.

□

2.4 Quelques notions et résultats sur le spectre quadratique généralisé

Dans cette section, on va introduire des nouvelles notions sur le spectre quadratique généralisé et des outils qui seront utilisés dans la construction de la nouvelle méthode d'approximation de ce dernier. Cela permet l'extention de l'étude du spectre généralisé au spectre quadratique généralisé, ainsi qu'une généralisation des concepts connus dans les problèmes de valeurs propres quadratiques.

Définition 2.4.1

On considère trois opérateurs A, B et C dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$.

1. *On appelle problème spectral quadratique généralisé, noté $Q(\lambda)$, l'équation*

$$\textit{Trouver } \lambda \in \mathbb{C} \;\textit{ et } u \in \mathcal{B}\backslash\{0\},\; Q(\lambda)u = 0, \tag{2.25}$$

où,

$$Q(\lambda)u = \lambda^2 Au + \lambda Bu + Cu. \tag{2.26}$$

2. *On appelle ensemble résolvant quadratique généralisé des opérateurs A, B et C, l'ensemble noté* $\mathrm{re}(A,B,C)$ *défini par*

$$\mathrm{re}(A,B,C) = \Big\{ z \in \mathbb{C} : Q(\lambda) = (z^2A + zB + C) \;\textit{ est inversible et borné} \Big\}. \tag{2.27}$$

3. *On appelle opérateur résolvant quadratique généralisé du triplet (A,B,C) en z, noté* $\mathrm{R_Q}(z,A,B,C)$*, la fonction définie par*

$$\begin{aligned} \mathrm{R_Q}(\cdot) = \mathrm{R_Q}(\cdot,A,B,C) : \mathrm{re}(A,B,C) \subset \mathbb{C} \;&\to\; \mathrm{BL}(\mathcal{B}) \\ z \;&\mapsto\; \mathrm{R_Q}(z) = [Q(\lambda)]^{-1} = (z^2A + zB + C)^{-1}. \end{aligned}$$

4. *On appelle spectre quadratique généralisé associé aux opérateurs A, B et C noté* $\mathrm{sp}(A,B,C)$*, le complémentaire de l'ensemble résolvant quadratique généralisé dans $\mathbb{C}$ donné par*

$$\mathrm{sp}(A,B,C) = \mathbb{C} \setminus \mathrm{re}(A,B,C). \tag{2.28}$$

5. *On appelle spectre ponctuel quadratique généralisé des opérateurs A, B et C, l'ensemble noté* $\mathrm{sp}_p(A,B,C)$*et défini par*

$$\mathrm{sp}_p(A,B,C) = \Big\{ \lambda \in \mathbb{C},\; \exists u \in \mathcal{B}\backslash\{0\} : Q(\lambda)u = \lambda^2Au + \lambda Bu + Cu = 0 \Big\}. \tag{2.29}$$

6. *On appelle une valeur spectrale quadratique généralisée isolée toute valeur* λ *dans* $\operatorname{sp}(A,B,C)$ *telle qu'il existe une courbe dans* $\operatorname{re}(A,B,C)$ *notée* Γ*, appelée contour de Cauchy, qui sépare* λ *de* $\operatorname{sp}(A,B,C)\setminus\{\lambda\}$*, et*

$$\lambda \in \operatorname{int}(\Gamma) \tag{2.30}$$

avec

$$\operatorname{int}(\Gamma)\cap \operatorname{sp}(A,B,C)\setminus\{\lambda\}=\emptyset, \tag{2.31}$$

où $\operatorname{int}(\Gamma)$ *désigne l'intèrieur du contour de Cauchy* Γ.

7. *On appelle rayon de convergence le nombre noté* $\kappa(\lambda)$ *défini par*

$$\begin{aligned}\kappa(\lambda) &= \frac{\sqrt{(\|\mathrm{R_Q}(\lambda)\|(2|\lambda|\|A\|+\|B\|))^2+4\|\mathrm{R_Q}(\lambda)\|\|A\|}}{2\|\mathrm{R_Q}(\lambda)\|\|A\|} \\ &- \frac{\|\mathrm{R_Q}(\lambda)\|(2|\lambda|\|A\|+\|B\|)}{2\|\mathrm{R_Q}(\lambda)\|\|A\|}\end{aligned} \tag{2.32}$$

pour tout $\lambda\in\operatorname{re}(A,B,C)$.

2.5 Propriétés de la résolvante quadratique généralisée

Nous allons procéder à l'extension et la validation des propriétés du spectre classique et du spectre généralisé à notre spectre quadratique généralisé.

Le théorème suivant montre que, même s'il y aura une perturbation d'un élément de l'ensemble résolvant quadratique généralisé, on a toujours une certaine stabilité de ce dernier.

Théorème 2.5.1

Soient A*,* B *et* C *trois opérateurs dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$*, soit* $z_0\in\mathbb{C}$*. Si* z *est dans l'ensemble résolvant quadratique généralisé* $\operatorname{re}(A,B,C)$ *tel que*

$$|z-z_0|<\kappa(z)$$

où $\kappa(z)$ *est donné par la formule (2.32), alors,* $z_0\in\operatorname{re}(A,B,C)$.

Pour démontrer ce dernier théorème, on a besoin d'énoncer le théorème suivant qui sera aussi utilisé dans le deuxième chapitre.

Théorème 2.5.2

Soit T un opérateur borné dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$.

$$\text{Si la norme } \|T\| < 1 \text{ alors } (T - I)^{-1} \text{ existe et est borné.} \tag{2.33}$$

De même, on a la formule suivante (série de Neumann)

$$(T - I)^{-1} = -\sum_{n \geq 0} T^n \tag{2.34}$$

et la norme $\|(T - I)^{-1}\|$ *est donnée par*

$$\|(T - I)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}. \tag{2.35}$$

Preuve.

Pour montrer que $z_0 \in \mathrm{re}(A, B, C)$, il suffit de montrer que l'opérateur résolvant quadratique généralisé $\mathrm{R_Q}(z_0)$ existe et est borné.

Soit l'opérateur $Q(z_0)$ donné par

$$Q(z_0) = z_0^2 A + z_0 B + C. \tag{2.36}$$

Pour montrer l'existence de l'opérateur $\mathrm{R_Q}(z_0)$, il suffit de montrer que l'inverse $[Q(z_0)]^{-1}$ de l'opérateur $Q(z_0)$ existe. D'abord, on écrit

$$Q(z_0) = Q(z_0) - Q(z) + Q(z) \tag{2.37}$$

$$\tag{2.38}$$

et d'après (2.37), on a

$$Q(z_0) = (z_0^2 - z^2)A + (z_0 - z)B + Q(z) \tag{2.39}$$

On met $Q(z)$ en facteur dans (2.39) pour obtenir

$$Q(z_0) = Q(z)\left[I - [Q(z)]^{-1}\left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right)\right] \tag{2.40}$$

et comme $z \in \mathrm{re}(A, B, C)$, ceci donne

$$Q(z_0) = Q(z)\left[I - \mathrm{R_Q}(z)\left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right)\right] \tag{2.41}$$

D'après (2.41), l'inverse de $Q(z_0)$ existe si l'inverse de l'opérateur

$$\Big[I - \mathrm{R_Q}(z)\left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right)\Big] \tag{2.42}$$

existe.

Prouvons que l'inverse de ce dernier existe. En utilisant la condition $|z - z_0| < \kappa(z)$, on obtient

$$\| \mathrm{R_Q}(z)\left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right) \| < 1. \tag{2.43}$$

Selon (2.33) du théorème 2.5.2, l'opérateur

$$\Big[I - \mathrm{R_Q}(z)\left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right)\Big]^{-1} \tag{2.44}$$

existe et est borné. Par conséquent sa norme est majorée par

$$\begin{aligned} &\| \Big[I - \mathrm{R_Q}(\lambda)\left((\lambda^2 - \lambda_0^2)A + (\lambda - \lambda_0)B\right)\Big]^{-1} \| \\ \leq \;& \Big(1 - \| \mathrm{R_Q}(\lambda)\left((\lambda^2 - \lambda_0^2)A + (\lambda - \lambda_0)B\right) \|\Big)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Comme $z \in \mathrm{re}(A, B, C)$, l'opérateur résolvant quadratique généralisé $\mathrm{R_Q}(z)$ existe et est borné ; ce qui implique que

$$[Q(z_0)]^{-1} = \mathrm{R_Q}(z_0) = \Big[I - \mathrm{R_Q}(z)\left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right)\Big]^{-1} \mathrm{R_Q}(z). \tag{2.46}$$

De (2.45), la norme de $\mathrm{R_Q}(z_0)$ vérifie

$$\| \mathrm{R_Q}(z_0)\| \leq \Big(1 - \| \mathrm{R_Q}(z)\left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right) \|\Big)^{-1} \| \mathrm{R_Q}(z)\|. \tag{2.47}$$

Donc, $\mathrm{R_Q}(z_0)$ existe et est borné, ce qui montre que $z_0 \in \mathrm{re}(A, B, C)$.

□

Corollaire 2.5.1

Le spectre quadratique généralisé $\mathrm{sp}(A, B, C)$ *est un ensemble fermé dans* $\mathbb{C}$*.*

Preuve.

En utilisant le fait que $\mathrm{re}(A, B, C)$ est le complémentaire de $\mathrm{sp}(A, B, C)$ dans $\mathbb{C}$, et d'après le théorème précédent, nous obtenons que $\mathrm{re}(A, B, C)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$.

□

Théorème 2.5.3

L'opérateur résolvant quadratique généralisé $\mathrm{R_Q}(\cdot)$ *est une fonction analytique sur* $\mathrm{re}(A, B, C)$*.*
De plus, sa dérivée par rapport à z *est donnée par l'expression suivante :*
pour tout $z \in \mathrm{re}(A, B, C)$*,*

$$\frac{d\,\mathrm{R_Q}}{dz}(z) = -\,\mathrm{R_Q}(z)(2zA + B)\,\mathrm{R_Q}(z). \tag{2.48}$$

Preuve.

Soient z, z_0 deux éléments de l'ensemble resolvant quadratique généralisé $\mathrm{re}(A, B, C)$ tels que $|z - z_0| < \kappa(z_0)$. On écrit

$$\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0) \;=\; \Big(z^2A + zB + C\Big)^{-1} - \Big(z_0^2A + z_0B + C\Big)^{-1}. \tag{2.49}$$

On prend $\mathrm{R_Q}(z)$ comme un facteur commun à droite et $\mathrm{R_Q}(z_0)$ à gauche, pour obtenir

$$\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0) = \mathrm{R_Q}(z)\Big((z_0^2 - z^2)A + (z_0 - z)B\Big)\,\mathrm{R_Q}(z_0). \tag{2.50}$$

Pour montrer que l'opérateur $\mathrm{R_Q}(z)$ est analytique et sa dérivée est donnée par (2.48), il suffit d'établir que

$$\lim_{z\to z_0}\left\|\frac{\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)}{z - z_0} + \mathrm{R_Q}(z)(2zA + B)\,\mathrm{R_Q}(z)\right\| = 0. \tag{2.51}$$

On commence à développer le terme

$$\left\|\frac{\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)}{z - z_0} + \mathrm{R_Q}(z)(2zA + B)\,\mathrm{R_Q}(z)\right\|$$

En utilisant la relation suivante :

$$\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0) = \mathrm{R_Q}(z)\Big((z_0^2 - z^2)A + (z_0 - z)B\Big)\,\mathrm{R_Q}(z_0), \tag{2.52}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)}{z - z_0} + \mathrm{R_Q}(z)(2zA + B)\,\mathrm{R_Q}(z)\right\| \\ = &\left\|\frac{\mathrm{R_Q}(z)\left((z_0^2 - z^2)A + (z_0 - z)B\right)\mathrm{R_Q}(z_0)}{z - z_0} + \mathrm{R_Q}(z)(2zA + B)\,\mathrm{R_Q}(z)\right\| \end{aligned} \tag{2.53}$$

Aprés simplification par $z - z_0$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)}{z - z_0} + \mathrm{R_Q}(z)(2zA + B)\,\mathrm{R_Q}(z)\right\| \\ = &\left\|-\,\mathrm{R_Q}(z)\left((z_0 + z)A + B\right)\mathrm{R_Q}(z_0) + \mathrm{R_Q}(z)(2zA + B)\,\mathrm{R_Q}(z)\right\| \end{aligned} \tag{2.54}$$

Ensuite, on ajoute et on retranche des termes, puis on applique les propriétés de la norme. Cela permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)}{z - z_0} + \mathrm{R_Q}(z)(2zA + B)\,\mathrm{R_Q}(z) \right\| \qquad (2.55) \\ \leq \; & |z_0 + z|\,\|\mathrm{R_Q}(z)A\|\,\|\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)\| + \|\mathrm{R_Q}(z)B\|\,\|\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)\| \\ + \; & |z - z_0|\|\,\mathrm{R_Q}(z)A\,\mathrm{R_Q}(z)\|. \end{aligned}$$

Pour établir que le terme

$$\left\| \frac{\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)}{z - z_0} + \mathrm{R_Q}(z)(2zA + B)\,\mathrm{R_Q}(z) \right\|$$

tend vers 0 quand z tend vers z_0, il suffit de montrer que

$$\|\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)\|$$

tend vers 0 aussi quand z tend vers z_0; pour cela, en utilisant la formule (2.44)

$$\mathrm{R_Q}(z_0) = \Big[I - \mathrm{R_Q}(z)\left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right)\Big]^{-1}\mathrm{R_Q}(z)$$

obtenue dans la preuve du théorème 2.5.1, et à l'aide du dévelopement en série de Neumann (2.34) du théorème 2.5.2 donné par

$$\Big[I - \mathrm{R_Q}(z)\left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right)\Big]^{-1} = \sum_{n\geq 0} \mathrm{R_Q}(z)^n \left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right)^n. \qquad (2.56)$$

On a alors,

$$\begin{aligned} \|\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)\| &= \left\| \mathrm{R_Q}(z) - \sum_{n\geq 0} \mathrm{R_Q}(z)^n \left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right)^n \mathrm{R_Q}(z) \right\| \\ &= \left\| - \sum_{n\geq 1} \mathrm{R_Q}(z)^n \left((z^2 - z_0^2)A + (z - z_0)B\right)^n \mathrm{R_Q}(z) \right\| \\ &= \left\| - \sum_{n\geq 1} \mathrm{R_Q}(z)^n (z - z_0)^n \left((z + z_0)A + B\right)^n \mathrm{R_Q}(z) \right\| \\ &\leq \sum_{n\geq 1} \left\|\mathrm{R_Q}(z)(z - z_0)\left((z + z_0)A + B\right)\right\|^n \|\mathrm{R_Q}(z)\|. \end{aligned}$$

Comme

$$\left\|\mathrm{R_Q}(z)(z - z_0)\left((z + z_0)A + B\right)\right\| < 1,$$

cette série géométrique converge, ce qui nous donne

$$\|\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)\| \leq \frac{\|\mathrm{R_Q}(z)\|\,|(z-z_0)|\,\|((z+z_0)A+B)\|\,\|\mathrm{R_Q}(z)\|}{1-|(z-z_0)|\,\|((z+z_0)A+B)\|\,\|\mathrm{R_Q}(z)\|}.$$

Cette dernière inégalité montre que

$$\lim_{z\to z_0}\|\mathrm{R_Q}(z) - \mathrm{R_Q}(z_0)\| = 0. \tag{2.57}$$

Cela implique que

$$\lim_{z\to z_0}\left\|\frac{\mathrm{R_Q}(z)-\mathrm{R_Q}(z_0)}{z-z_0} + \mathrm{R_Q}(z)(2zA+B)\,\mathrm{R_Q}(z)\right\| = 0. \tag{2.58}$$

Par conséquent la dérivée de l'opérateur $\mathrm{R_Q}(z)$ par rapport à z est

$$\frac{d\,\mathrm{R_Q}}{dz}(z) = -\,\mathrm{R_Q}(z)(2zA+B)\,\mathrm{R_Q}(z).$$

□

Le théorème suivant est un résultat essentiel qui nous permet de montrer la propriété U sous notre nouveau type de convergence (la $\nu-$convergence généralisée).

L'idée fondamentale est d'écrire l'opérateur $C = I + D$ dans (2.26), où D est un opérateur borné dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$.

Théorème 2.5.4

Soient A, B et D trois opérateurs dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$. Les propriétés suivantes sont vérifiées

(a) *Pour z_1 et z_2 dans l'ensemble résolvant quadratique généralisé $\mathrm{re}(A,B,I+D)$, on a*

$$\mathrm{R_Q}(z_1) - \mathrm{R_Q}(z_2) = \mathrm{R_Q}(z_1)\left[(z_2^2 - z_1^2)A + (z_2 - z_1)B\right]\mathrm{R_Q}(z_2). \tag{2.59}$$

(b) *Pour $z \in \mathrm{re}(A,B,I+D)$, l'opérateur $\mathrm{R_Q}(z)$ vérifie*

$$\mathrm{R_Q}(z) = I - z^2 A\,\mathrm{R_Q}(z) - zB\,\mathrm{R_Q}(z) - D\,\mathrm{R_Q}(z). \tag{2.60}$$

Preuve.

Soient A, B et D trois opérateurs dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$.

(a) Soient z_1, z_2 deux éléments de l'ensemble résolvant quadratique généralisé $\mathrm{re}(A, B, I+D)$.

On écrit

$$\mathrm{R_Q}(z_1) - \mathrm{R_Q}(z_2) = (z_1^2 A + z_1 B + I + D)^1 - (z_2^2 A + z_2 B + I + D)^{-1}. \tag{2.61}$$

On prend $\mathrm{R_Q}(z_1)$ comme facteur commun, pour obtenir

$$\mathrm{R_Q}(z_1) - \mathrm{R_Q}(z_2) \;=\; \mathrm{R_Q}(z_1)\left[I - (z_1^2 A + z_1 B + I + D)\,\mathrm{R_Q}(z_2)\right].$$

De même, en mettant $\mathrm{R_Q}(z_2)$ en facteur, il s'ensuit

$$\begin{aligned}\mathrm{R_Q}(z_1) - \mathrm{R_Q}(z_2) &= \mathrm{R_Q}(z_1)\left[(z_2^2 A + z_2 B + I + D) - (z_1^2 A + z_1 B + I + D)\right]\mathrm{R_Q}(z_2)\\ &= \mathrm{R_Q}(z_1)\left[(z_2^2 - z_1^2)A + (z_2 - z_1)B\right]\mathrm{R_Q}(z_2).\end{aligned}$$

Ceci montre le cas **(a)**.

(b) Pour $z \in \mathrm{re}(A, B, I + D)$, on peut écrire l'opérateur identité par la formule suivante :

$$I \;=\; (z^2 A + zB + I + D)\,\mathrm{R_Q}(z) = z^2 A\,\mathrm{R_Q}(z) + zB\,\mathrm{R_Q}(z) + D\,\mathrm{R_Q}(z) + \mathrm{R_Q}(z).$$

Alors, l'opérateur $\mathrm{R_Q}(z)$ s'écrit

$$\mathrm{R_Q}(z) = I - z^2 A\,\mathrm{R_Q}(z) - zB\,\mathrm{R_Q}(z) - D\,\mathrm{R_Q}(z), \tag{2.62}$$

ce qui prouve **(b)**.

□

Le théorème suivant représente un résultat essentiel qui nous permet de montrer la propriété L du schéma d'approximation du spectre quadratique généralisé.

Théorème 2.5.5

Soient A, B et C trois opérateurs dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$.

(a) *Pour $z \in \mathrm{re}(A, B, C) \setminus \{0\}$, on a alors*

$$(B + zA)\,\mathrm{R_Q}(z)C = C\,\mathrm{R_Q}(z)(B + zA). \tag{2.63}$$

(b) *Si l'opérateur C commute avec $\mathrm{R_Q}(z_1)$ et $\mathrm{R_Q}(z_2)$, pour certains $z_1, z_2 \in \mathrm{re}(A, B, C)\setminus\{0\}$, alors C commute avec A, B et $\mathrm{R_Q}(z)$ pour tout $z \in \mathrm{re}(A, B, C)$.*

Preuve.

(a) Pour tout $z \in \mathrm{re}(A,B,C)\setminus\{0\}$ on va montrer la relation

$$(B+zA)\,\mathrm{R_Q}(z)C = C\,\mathrm{R_Q}(z)(B+zA),$$

en développant ses deux membres .

Pour le membre de gauche, on prend $1/z$ comme facteur commun pour avoir

$$(B+zA)\,\mathrm{R_Q}(z)C = \frac{1}{z}(zB+z^2A)\,\mathrm{R_Q}(z)C, \tag{2.64}$$

Ensuite, on ajoute et on retranche le même terme pour obtenir

$$\begin{aligned}(B+zA)\,\mathrm{R_Q}(z)C &= \frac{1}{z}(z^2A+zB+C)\,\mathrm{R_Q}(z)C - \frac{1}{z}C\,\mathrm{R_Q}(z)C \\ &= \frac{1}{z}C - \frac{1}{z}C\,\mathrm{R_Q}(z)C.\end{aligned} \tag{2.65}$$

De manière similaire, on développe le membre de droite. On obtient

$$\begin{aligned}C\,\mathrm{R_Q}(z)(B+zA) &= \frac{1}{z}C\,\mathrm{R_Q}(z)(zB+z^2A) \\ &= \frac{1}{z}C\,\mathrm{R_Q}(z)(z^2A+zB+C) - \frac{1}{z}C\,\mathrm{R_Q}(z)C \\ &= \frac{1}{z}C - \frac{1}{z}C\,\mathrm{R_Q}(z)C.\end{aligned} \tag{2.66}$$

De (2.65) and (2.66), on a

$$(B+zA)\,\mathrm{R_Q}(z)C = C\,\mathrm{R_Q}(z)(B+zA),$$

ce qui montre le cas **(a)**

(b) Pour tout $z_i \in \mathrm{re}(A,B,C)\setminus\{0\}\,, i=1,2$, on a $C\,\mathrm{R_Q}(z_i) = \mathrm{R_Q}(z_i)C$, i.e.

$$C(z_i^2A+z_iB+C)^{-1} = (z_i^2A+z_iB+C)^{-1}C.$$

Multiplions à gauche et à droite par $(z_i^2A+z_iB+C)$, pour obtenir

$$(z_i^2CA+z_iCB+C^2) = (z_i^2AC+z_iBC+C^2),$$

ce qui permet d'écrire

$$z_i\left[z_i(CA-AC)+(CB-BC)\right]=0.$$

Par conséquent, $AC=CA$ et $CB=BC$.

□

Remarque 2.5.1

1. *Le résultat obtenu en* ***(a)*** *est une généralisation de certains résultats présentés par Gohberg [9].*
2. *L'hypothèse que l'opérateur C commute avec les opérateurs résolvants quadratiques généralisés* $\mathrm{R_Q}(z_1)$ *et* $\mathrm{R_Q}(z_2)$ *pour certains* z_1, z_2 *dans l'ensemble* $\mathrm{re}(A, B, C) \setminus \{0\}$*, peut être utilisée pour l'opérateur A au lieu de l'opérateur C, ce qui donne le même résultat. En fait, on peut réécrire le problème spectral quadratique $z^2A + zB + C$ sous la forme* $Q(\tilde{z}) = A + \tilde{z}B + \tilde{z}^2C = 0$ *avec* $\tilde{z} = 1/z,\ z \neq 0$.
3. *Les deux derniers théorèmes à savoir théorème 2.5.4 et théorème 2.5.5 représentent les outils principaux utilisés pour développer la deuxième section du chapitre 2.*

2.6 Dérivée de Fréchet de la résolvante quadratique généralisée

Rappelons que la méthode de Newton-Kantorovitch est une méthode bien connue dans le calcul approché des valeurs propres matricielles, puisque qu' elle permet également le développement des méthodes du raffinage itératives des valeurs propres approximatives. Pour cette raison, nous pensons à utiliser cette méthode pour faire le raffinage des valeurs propres quadratiques généralisées. Pour cela, nous aurons recours à l'étude de la dérivée de Fréchet de l'opérateur résolvant quadratique généralisé qui est considéré comme une fonction non linéaire sur $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$. Cette étude nous permet de montrer des propriétés plus régulières de l'opérateur résolvant par rapport à celles obtenues dans [13].

Pour introduire la notion de la dérivée de Fréchet, on considère deux espaces de Banach, notés $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

On note par $\mathrm{BL}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ l'espace des applications linéaires bornées, définies de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}_2$.

Soit F une application définie sur Ω, un ouvert de $\mathcal{B}_1$ telle que

$$F : \Omega \subset \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2 \,.$$

Définition 2.6.1

On appelle dérivée au sens de Fréchet de F l'opérateur linéaire continue $L \in \mathrm{BL}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ défini de la manière suivante :

Pour $x \in \Omega$ et pour tout $h \in \mathcal{B}_1$.

$$L(x)h = F(x+h) - F(x) - o(\|h\|).$$

où $o(\|h\|)$ tend vers 0 quand $\|h\|$ tend vers 0.

Le théorème suivant nous permet le calcul de la dérivée de Fréchet de l'opérateur résolvant quadratique généralisé $\mathrm{R_Q}$.

Théorème 2.6.1

On note par D_A^F, D_B^F et D_C^F les dérivées au sens de Fréchet en A, B et C respectivement. Pour tout $z \in \mathrm{re}(A, B, C)$, on a

- *L'opérateur $\mathrm{R_Q}(z, \cdot, B, C) : \mathrm{BL}(\mathcal{B}) \to \mathrm{BL}(\mathcal{B})$ est différentiable au sens de Fréchet et pour tout opérateur $H \in \mathrm{BL}(\mathcal{B})$ sa dérivée au sens de Fréchet en A est donnée par la formule suivante :*

$$D_A \mathrm{R_Q}(z, A, B, C)H = -z^2 \mathrm{R_Q}(z, A, B, C)H \mathrm{R_Q}(z, A, B, C),$$

- *L'opérateur $\mathrm{R_Q}(z, A, \cdot, C) : \mathrm{BL}(\mathcal{B}) \to \mathrm{BL}(\mathcal{B})$ est différentiable au sens de Fréchet et pour tout opérateur $H \in \mathrm{BL}(\mathcal{B})$ sa dérivée au sens de Fréchet en B est donnée par la formule suivante :*

$$D_B \mathrm{R_Q}(z, A, B, C)H = -z \mathrm{R_Q}(z, A, B, C)H \mathrm{R_Q}(z, A, B, C),$$

- *L'opérateur $\mathrm{R_Q}(z, A, B, \cdot) : \mathrm{BL}(\mathcal{B}) \to \mathrm{BL}(\mathcal{B})$ est différentiable au sens de Fréchet et pour tout opérateur $H \in \mathrm{BL}(\mathcal{B})$ sa dérivée au sens de Fréchet en C est donnée par la formule suivante :*

$$D_C \mathrm{R_Q}(z, A, B, C)H = -\mathrm{R_Q}(z, A, B, C)H \mathrm{R_Q}(z, A, B, C),$$

Preuve.
Soient $z \in \mathrm{re}(A, B, C)$ et A, B, et C trois opérateurs dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$. On va montrer qu'il existe un opérateur qui est la dérivée au sens de Fréchet de $\mathrm{R_Q}(z, \cdot, B, C)$ en A.
On peut écrire

$$\mathrm{R_Q}(z, A+H, B, C) - \mathrm{R_Q}(z, A, B, C) = (z^2(A+H) + zB + C)^{-1} - (z^2A + zB + C)^{-1}$$

On prend $(z^2(A+H)+zB+C)^{-1}$ comme facteur commun à gauche et $(z^2A+zB+C)^{-1}$ à droite. On obtient alors,

$$\begin{aligned} & \mathrm{R_Q}(z,A+H,B,C)-\mathrm{R_Q}(z,A,B,C) \\ = \; & (z^2(A+H)+zB+C)^{-1}\left[z^2A+zB+C-(z^2(A+H)+zB+C)\right](z^2A+zB+C)^{-1} \\ = \; & (z^2(A+H)+zB+C)^{-1}\left(-z^2H\right)(z^2A+zB+C)^{-1} = -z^2\,\mathrm{R_Q}(z,A+H,B,C)H\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C), \end{aligned}$$

i.e.

$$\mathrm{R_Q}(z,A+H,B,C)-\mathrm{R_Q}(z,A,B,C) = \mathrm{R_Q}(z,A,B,C)-z^2\,\mathrm{R_Q}(z,A+H,B,C)H\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C).$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} & \mathrm{R_Q}(z,A+H,B,C)-\mathrm{R_Q}(z,A,B,C) \\ = \; & -z^2\left[\mathrm{R_Q}(z,A,B,C)-z^2\,\mathrm{R_Q}(z,A+H,B,C)H\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C)\right]H\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C) \\ = \; & -z^2\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C)H\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C)+z^4\,\mathrm{R_Q}(z,A+H,B,C)H\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C)H\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C). \end{aligned}$$

Il est clair que

$$z^4\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C)H\,\mathrm{R_Q}(z,A+H,B,C)H\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C) \simeq o(\|H\|^2)$$

pour $\|H\|$ proche de 0.

Ceci signifie que $D_A\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C)H = -z^2\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C)H\,\mathrm{R_Q}(z,A,B,C)$.

De manière similaire, on obtient les autres résultats.

□

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu les concepts de la théorie spectrale du cas généralisé à notre cas, afin de définir le spectre quadratique généralisé associé à trois opérateurs linéaires bornés. De plus, nous avons également développé les outils théoriques de la méthode spectrale quadratique généralisée. Enfin, nous avons généralisé certaines propriétés classiques mentionnées dans [1]. Ces généralisations nous ont permis de construire un nouveau type de convergence dans le deuxième chapitre.

Chapitre 3

Approximation du spectre quadratique généralisé

3.1 Introduction

Notre principal intérêt réside dans la détermination des valeurs spectrales associées aux trois opérateurs linéaires bornés A, B et C, mentionnés dans le premier chapitre (section 1). Comme la résolution directe des problèmes spectraux est assez compliquée, car le calcul des valeurs spectrales exactes est presque impossible dans la majorité des cas, nous sommes contraints d'établir des estimations approximatives pour ces problèmes spectraux.

Généralement, ces approximations sont les résultats exacts de calculs du spectre quadratique généralisé associé aux trois opérateurs linéaires bornés $\tilde{A}, \tilde{B}$ et $\tilde{C}$ qui sont des approximations des opérateurs A, B et C donnés.

Souvent, les opérateurs $\tilde{A}, \tilde{B}$ et $\tilde{C}$ sont choisis, pour être éléments des suites d'opérateurs linéaires bornés $(A_n), (B_n)$ et (C_n), convergeant dans un sens approprié vers A, B et C respectivement.

Pour les raisons évoqués ci-dessus, on se concentre sur la construction d'une méthode approximative pour le spectre quadratique généralisé.

Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soient A, B et C trois opérateurs linéaires bornés dans BL($\mathcal{B}$), l'espace des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}$. Soient $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites dans BL($\mathcal{B}$).

Pour bien construire notre méthode et pour déterminer la relation entre le spectre quadratique généralisé approché $\text{sp}(A_n, B_n, C_n)$ et le spectre quadratique généralisé $\text{sp}(A, B, C)$, nous supposons que les suites d'opérateurs $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, convergent vers les opérateurs A, B et C respectivement, dans un sens donné qui sera précisé ultéreurement. Aussi, il faut suivre le schéma d'approximation associé au problème spectral quadratique, développé dans le premier chapitre, à savoir,

Propriété U :

$$\text{Si } \lambda_n \in \text{sp}(A_n, B_n, C_n) \text{ et } \lambda_n \to \lambda \text{ ,} alors\ \lambda \in \text{sp}(A, B, C).$$

Propriété L :

Si $\lambda \in \operatorname{sp}(A, B, C)$, il existe une suite $\lambda_n \in \operatorname{sp}(A_n, B_n, C_n)$ telle que $\lambda_n \to \lambda$.

3.2 Approximation du spectre quadratique généralisé au sens de la propriété U

Dans cette section, nous allons vérifier la propriété U, mentionnée ci-dessus, qui justifie l'absence de la pollution spectrale pour les opérateurs bornés. Ainsi, nous allons prouver la convergence du spectre quadratique généralisé approché $\operatorname{sp}(A_n, B_n, C_n)$, vers le spectre quadratique généralisé exacte $\operatorname{sp}(A, B, C)$, en utilisant la convergence des suites des opérateurs $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en norme ainsi que la convergence en collectivement compact, vers les opérateurs A, B, C respectivement.
De plus, nous allons procéder à l'extension du nouveau type de convergence ($\nu-$convergence généralisée) développé dans le premier chapitre au cas quadratique.

Le théorème suivant nous permet de démontrer notre résultat principal qui sera développé ultérieurement.

Théorème 3.2.1
Soient $A, B, C, \tilde{A}, \tilde{B}$ *et* $\tilde{C}$ *dans* $\operatorname{BL}(\mathcal{B})$, *et* $z \in \mathbb{C}$.
On définit les opérateurs $Q(z)$ *et* $\tilde{Q}(z)$ *sur* $\operatorname{BL}(\mathcal{B})$ *par*

$$Q(z) = z^2 A + zB + C, \tag{3.1}$$

$$\tilde{Q}(z) = z^2 \tilde{A} + z\tilde{B} + \tilde{C}. \tag{3.2}$$

Pour z *un élément de* $\operatorname{re}(A, B, C)$ *tel que* $Q(z)$ *et* $\tilde{Q}(z)$ *vérifient la propriété*

$$\left\| \left[Q(z) - \tilde{Q}(z) \right] \operatorname{R_Q}(z) \right\| < 1, \tag{3.3}$$

on a $z \in \operatorname{re}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$.
De plus, la norme de la résolvante quadratique généralisée de $\tilde{A}, \tilde{B}$ *et* $\tilde{C}$, *est donnée par*

$$\| \operatorname{R_{\tilde{Q}}}(z) \| \leq \frac{\| \operatorname{R_Q}(z) \|}{1 - \left\| \left(Q(z) - \tilde{Q}(z) \right) \operatorname{R_Q}(z) \right\|}, \tag{3.4}$$

où,

$$\operatorname{R_{\tilde{Q}}}(z) = \left[\tilde{Q}(z) \right]^{-1} = \left(z^2 \tilde{A} + z\tilde{B} + \tilde{C} \right)^{-1}$$

et

$$\mathrm{R_Q}(z) = [Q(z)]^{-1} = \left(z^2 A + zB + C\right)^{-1}.$$

De même, si $Q(z)$ *et* $\tilde{Q}(z)$ *avec* $z \in \mathrm{re}(A, B, C)$ *satisfont*

$$\left\| \left[\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right) \mathrm{R_Q}(z)\right]^2 \right\| < 1, \tag{3.5}$$

alors, on a $z \in \mathrm{re}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, *en plus la norme de* $\mathrm{R_{\tilde{Q}}}(z)$ *dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$ *vérifie l'inégalité suivante :*

$$\| \mathrm{R_{\tilde{Q}}}(z) \| \leq \frac{\| \mathrm{R_Q}(z) \| \left[1 + \left\| \left[\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right) \mathrm{R_Q}(z)\right]^2 \right\|\right]}{1 - \left\| \left[\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right) \mathrm{R_Q}(z)\right]^2 \right\|}. \tag{3.6}$$

Preuve.

Pour montrer ce théorème, il suffit de prouver l'existence et la bornétude de l'opérateur $\mathrm{R_{\tilde{Q}}}(z)$, qui servent à montrer que $z \in \mathrm{re}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$.

Soit $z \in \mathrm{re}(A, B, C)$. $Q(z)$ s'écrit

$$\tilde{Q}(z) \quad = \quad \tilde{Q}(z) - Q(z) + Q(z).$$

On prend $Q(z)$ alors en facteur commun, ce qui donne

$$\tilde{Q}(z) \quad = \quad Q(z) \left[I - \left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right) \mathrm{R_Q}(z)\right], \tag{3.7}$$

avec $\mathrm{R_Q}(z) = [Q(z)]^{-1}$

Aussi, pour établir que $\mathrm{R_{\tilde{Q}}}(z) = \left[\tilde{Q}(z)\right]^{-1}$ existe, il suffit de montrer que les opérateurs

$$\left[I - \left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right) \mathrm{R_Q}(z)\right] \text{ et } Q(z)$$

sont inversibles.

Il est clair que $Q(z)$ est inversible et borné car $z \in \mathrm{re}(A, B, C)$, et on peut écrire $\mathrm{R_Q}(z) = [Q(z)]^{-1}$. Maintenant, pour montrer que $\left[I - \left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right) \mathrm{R_Q}(z)\right]$ est inversible et borné, en utilisant la condition (3.3) et d'après le théorème 2.5.2, on a

$$\left[I - \left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right) \mathrm{R_Q}(z)\right]^{-1}$$

ce qui montre l'existence de l'opérateur inverse ci-dessus et que sa norme est bornée par

$$\| \left[I - \left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right) \mathrm{R_Q}(z)\right]^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| \left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right) \mathrm{R_Q}(z) \|} \tag{3.8}$$

Cela implique que

$$\mathrm{R}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z) = \left[\tilde{Q}(z)\right]^{-1} \quad = \quad \left[I - \left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right]^{-1}\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z). \tag{3.9}$$

De 3.8 la norme de $\mathrm{R}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z)$ est majorée par

$$\|\,\mathrm{R}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z)\| \leq \frac{\|\,\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\|}{1 - \left\|\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right\|}. \tag{3.10}$$

Donc, $\mathrm{R}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z)$ existe et borné, ce qui montre que $z \in \mathrm{re}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$.

Ensuite, on montre que $\mathrm{R}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z)$ est borné moyennant la condition (3.5).

Comme

$$\left[I - \left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right]^{-1}$$

existe et est borné, d'après la série de Neumann, on peut écrire

$$\left[I - \left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right]^{n} \tag{3.11}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\mathrm{R}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z) \quad = \quad \mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right]^{n}$$

On décompose la série en deux séries l'une des termes paires et l'autre des termes impaires. On obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z) \quad &= \quad \mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right]^{2k} \\ &+ \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right]^{2k+1}\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\end{aligned}$$

Avec une simplification, on a

$$\mathrm{R}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z) \quad = \quad \mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\left[I + \left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right)^{2}\right]^{k}.$$

En appliquant la norme sur cette dernière égalité, on aboutit à

$$\|\,\mathrm{R}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z)\,\| \quad \leq \quad \|\,\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\left[I + \left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right]\|\sum_{k=0}^{\infty}\|\left[\left(\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right)^{2}\right]\|^{k}.$$

En utilisant le fait que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\left[\left(\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R}_{\mathrm{Q}}(z)\right)^{2}\right]\right\|^{k}$$

est une série géométrique de rayon

$$\left\| \left(\left(Q(z) - \tilde{Q}(z) \right) \mathrm{R_Q}(z) \right)^2 \right\| < 1$$

on conclut que cette série est convergente vers

$$\frac{1}{1 - \left\| \left[\left(Q(z) - \tilde{Q}(z) \right) \mathrm{R_Q}(z) \right]^2 \right\|}$$

ce qui donne

$$\| \mathrm{R}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z) \| \leq \frac{\| \mathrm{R_Q}(z) \| \left[1 + \left\| \left[\left(Q(z) - \tilde{Q}(z) \right) \mathrm{R_Q}(z) \right]^2 \right\| \right]}{1 - \left\| \left[\left(Q(z) - \tilde{Q}(z) \right) \mathrm{R_Q}(z) \right]^2 \right\|}.$$

Donc, les deux propriétés (3.4) et (3.6) sont vérifiées et le théorème est démontré.

□

Afin de prouver la convergence du spectre quadratique généralisé au sens de la propriété U, nous allons établir cette convergence sous les trois types de convergence à savoir, la convergence en norme, la convergence en collectivement compact et enfin la $\nu-$ convergence généralisée .

3.2.1 Propriété U sous la convergence en norme (notée $\xrightarrow{n}$)

Le théorème suivant montre que la propriété U est vérifiée sous la convergence en norme.

Théorème 3.2.2

Soient $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites d'opérateurs dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$, vérifiant l'hypothèse :

$$(\mathcal{H}1) \;\; A_n \xrightarrow{n} A, \;\; B_n \xrightarrow{n} B, \;\; C_n \xrightarrow{n} C,$$

alors la propriété U (pour $\lambda_n \in \mathrm{sp}(A_n, B_n, C_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ telle que λ_n converge vers λ dans $\mathbb{C}$ alors $\lambda \in \mathrm{sp}(A, B, C)$) est satisfaite.

Preuve.

La démonstration de ce théorème est basée sur le raisonnement par l'absurde.
On suppose que $\lambda \in \mathrm{re}(A,B,C)$. Comme l'ensemble résolvant quadratique généralisé $\mathrm{re}(A,B,C)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$, il existe un scalaire $\delta > 0$ tel que

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-\lambda| \leq \delta\} \subset \mathrm{re}(A,B,C).$$

De plus, la résolvante quadratique généralisé $\mathrm{R_Q}(\cdot)$ est analytique sur l'ensemble $\mathrm{re}(A,B,C)$ (voir le théorème 2.5.3), et on peut définir le réel β par

$$\beta = \sup\{\|R_Q(z)\| : z \in \Omega\} < \infty.$$

On cherche à montrer que l'ensemble Ω est inclus dans l'ensemble $\mathrm{re}(A_n,B_n,C_n)$. Pour cela, il suffit de prouver que pour $z \in \Omega$. on a $z \in \mathrm{re}(A_n,B_n,C_n)$, ce qui revient à montrer que l'opérateur $\mathrm{R_{Q_n}}(z) = (z^2A_n + zB_n + C_n)^{-1}$ existe et est borné.

D'une part, en utilisant l'hypothèse $(\mathcal{H}1)$, on suppose, de plus que pour $z \in \Omega$ ils existent trois entiers naturels n_1, n_2 et n_3 vérifiant

$$\|A - A_n\| \leq \frac{1}{6\beta(\delta+|\lambda|)^2}, \quad n \geq n_1, \tag{3.12}$$

$$\|B - B_n\| \leq \frac{1}{6\beta(\delta+|\lambda|)}, \quad n \geq n_2, \tag{3.13}$$

$$\|C - C_n\| \leq \frac{1}{6\beta}, \quad n \geq n_3. \tag{3.14}$$

On montre alors que

$$\|[Q(z) - Q_n(z)]\,\mathrm{R_Q}(z)\| < 1.$$

Pour tout $n \geq \max(n_1,n_2,n_3)$, on a la relation suivante :

$$\|[Q(z) - Q_n(z)]\,\mathrm{R_Q}(z)\| = \left\|\left[z^2(A-A_n) + z(B-B_n) + (C-C_n)\right]\mathrm{R_Q}(z)\right\|$$

Comme $\|\mathrm{R_Q}(z)\| \leq \beta$ et d'après $(3.12) - (3.14)$, on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\|[Q(z) - Q_n(z)]\,\mathrm{R_Q}(z)\| &\leq \Big(|z|^2\|A-A_n\| + |z|\|B-B_n\| + \|C-C_n\|\Big)\beta \\ &\leq \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

Donc, d'après la condition ($\|[Q(z) - Q_n(z)]\, \mathrm{R_Q}(z)\| < 1$) l'opérateur

$$\mathrm{R_{Q_n}}(z) = (z^2 A_n + z B_n + C_n)^{-1}$$

existe et est borné. Par conséquent $z \in \mathrm{re}(A_n, B_n, C_n)$, et donc, $\Omega \subset \mathrm{re}(A_n, B_n, C_n)$ pour tout n assez grand.

Comme la suite des valeurs spectrales approchées λ_n converge vers la valeur exacte λ, et $\lambda_n \in \Omega \subset \mathrm{re}(A_n, B_n, C_n)$ pour tout n, λ_n n'est pas dans le spectre $\mathrm{sp}(A_n, B_n, C_n)$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de la propriété U ($\lambda_n \in \mathrm{sp}(A_n, B_n, C_n)$ pour tout n). Par conséquent, λ doit être dans $\mathrm{sp}(A, B, C)$.

□

3.2.2 Propriété U sous la convergence collectivement compact (notée $\stackrel{cc}{\rightarrow}$)

Dans cette section, on va prouver que la propriété U est réalisable sous la convergence des suites d'opérateurs A_n, B_n, et C_n en collectivement compact.
Dans la suite, on a besoin du lemme technique suivant pour démontrer notre théorème fondamental.

Lemme 3.2.1
Soient $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'opérateurs dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$*,* N, M *et* K *trois opérateurs dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$*.*
Si les suites N_n *et* M_n *convergent vers* N *et* M *respectivement en collectivement compact, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \|(N - N_n)K(M - M_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|(M - M_n)K(N - N_n)\| = 0. \qquad (3.15)$$

Preuve.

Comme les suites $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes en collectivement compact, on a :

Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\lim_{n\to\infty} \|(N - N_n)x\|_{\mathcal{B}} = 0$ et il existe un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble

$$S_1 = \bigcup_{n\geq n_1} \{N_n x - Nx \ : x \in \mathcal{B},\ \|x\|_{\mathcal{B}} = 1\}$$

est relativement compact (définition de la convergence en collectivement compacte).

Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\lim_{n\to\infty} \|(M - M_n)x\|_{\mathcal{B}} = 0$ et il existe un entier $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble suivant

$$S_2 = \bigcup_{n\geq n_2} \{M_n x - Mx \ : x \in \mathcal{B},\ \|x\|_{\mathcal{B}} = 1\}$$

est relativement compact (définition de la convergence en collectivement compact).

Comme K est un opérateur borné, nous savons que les ensembles $K(S_1)$ et $K(S_2)$ sont relativement compacts. Par conséquent

$$\begin{aligned}\|(N - N_n)K(M - M_n)\| &= \sup_{\|x\|_{\mathcal{B}}=1} \|(N - N_n)K(M - M_n)x\|_{\mathcal{B}} \\ &= \sup_{\|x\|_{\mathcal{B}}=1} \|(N - N_n)K(Mx - M_n x)\|_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

et pour $y = K(Mx - M_n x) \in K(S_2)$, on obtient la relation

$$\|(N - N_n)K(M - M_n)\| = \sup_{y\in K(S_2)} \|(N - N_n)y\|_{\mathcal{B}}.$$

En passant à la limite, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|(N - N_n)K(M - M_n)\| \leq \sup_{y\in K(S_2)} \lim_{n\to\infty} \|(N - N_n)y\|_{\mathcal{B}}.$$

De plus,

$$\lim_{n\to\infty} \|(N - N_n)y\|_{\mathcal{B}} = 0.$$

Finalement, on vérifie que

$$\lim_{n\to\infty} \|(N - N_n)K(M - M_n)\| = 0.$$

De manière simililaire on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \|(M - M_n)K(N - N_n)\| = 0.$$

Cela montre le résultat (3.15) et donc, le **lemme 3.2.1**.

□

Dans le théorème ci-dessous, on vérifie la propriété U sous la convergence en collectivement compact.

Théorème 3.2.3

Soient $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites d'opérateurs dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$*,*
où les opérateurs A_n, B_n *et* C_n *vérifient l'hypothèse suivante :*

$$(\mathcal{H}2) \;\; A_n \xrightarrow{cc} A, \;\; B_n \xrightarrow{cc} B, \;\; C_n \xrightarrow{cc} C.$$

Alors la propriété U (pour $\lambda_n \in \mathrm{sp}(A_n, B_n, C_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *telle que* λ_n *converge vers* λ *dans* $\mathbb{C}$ *alors* $\lambda \in \mathrm{sp}(A, B, C)$*) est satisfaite.*

Preuve.

La démonstration de ce théorème est basée sur le même raisonnement du cas précédent. On suppose que $\lambda \in \mathrm{re}(A, B, C)$. Comme l'ensemble résolvant quadratique généralisé $\mathrm{re}(A, B, C)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$, il existe un scalaire $\delta > 0$ tel que

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| \leq \delta\} \subset \mathrm{re}(A, B, C).$$

De plus, la résolvante quadratique généralisé $\mathrm{R_Q}(\cdot)$ est analytique sur l'ensemble $\mathrm{re}(A, B, C)$, et on peut définir le réel β par

$$\beta = \sup\{\|R_Q(z)\| : z \in \Omega\} < \infty.$$

On cherche à montrer que l'ensemble Ω est inclus dans l'ensemble $\mathrm{re}(A_n, B_n, C_n)$. Pour cela, il suffit de prouver que pour $z \in \Omega$ on a $z \in \mathrm{re}(A_n, B_n, C_n)$, ce qui revient à montrer que l'opérateur $\mathrm{R_{Q_n}}(z) = (z^2 A_n + z B_n + C_n)^{-1}$ existe et est borné.

D'une part, en utillisant l'hypothèse $(\mathcal{H}2)$,on suppose, de plus que pour $z \in \Omega$ ils existent des entiers naturels n_i avec $i = \overline{1, 9}$ vérifiant

$$\|(A - A_n)\, \mathrm{R_Q}(z)(A - A_n)\| \leq \frac{1}{18\beta(\delta + |\lambda|^4)}, \quad n \geq n_1, \tag{3.16}$$

$$\|(B - B_n)\, \mathrm{R_Q}(z)(A - A_n)\| \leq \frac{1}{18\beta(\delta + |\lambda|^3)}, \quad n \geq n_2, \tag{3.17}$$

$$\|(A - A_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(B - B_n)\| \leq \frac{1}{18\beta(\delta + |\lambda|^3)}, \quad n \geq n_3, \tag{3.18}$$

$$\|(B - B_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(B - B_n)\| \leq \frac{1}{18\beta(\delta + |\lambda|^2)}, \quad n \geq n_4, \tag{3.19}$$

$$\|(A - A_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(C - C_n)\| \leq \frac{1}{18\beta(\delta + |\lambda|^2)}, \quad n \geq n_5, \tag{3.20}$$

$$\|(C - C_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(A - A_n)\| \leq \frac{1}{18\beta(\delta + |\lambda|^2)}, \quad n \geq n_6, \tag{3.21}$$

$$\|(B - B_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(C - C_n)\| \leq \frac{1}{18\beta(\delta + |\lambda|)}, \quad n \geq n_7, \tag{3.22}$$

$$\|(C - C_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(B - B_n)\| \leq \frac{1}{18\beta(\delta + |\lambda|)}, \quad n \geq n_8, \tag{3.23}$$

$$\|(C - C_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(C - C_n)\| \leq \frac{1}{18\beta}, \quad n \geq n_9. \tag{3.24}$$

En appliquant la norme, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|[(Q(z) - Q_n(z))\,\mathrm{R_Q}(z)]^2\right\| &= \|[(Q(z) - Q_n(z))\,\mathrm{R_Q}(z)]\,[(Q(z) - Q_n(z))\,\mathrm{R_Q}(z)]\| \\
&\leq \|(Q(z) - Q_n(z))\,\mathrm{R_Q}(z)(Q(z) - Q_n(z))\|\,\|\mathrm{R_Q}(z)\|.
\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq \max(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9)$, et d'après (3.16) – (3.24), on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
\left\|[(Q(z) - Q_n(z))\,\mathrm{R_Q}(z)]^2\right\| &\leq \beta(\|(C - C_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(C - C_n)\| \\
&+ |z|^4\|(A - A_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(A - A_n)\| + |z|^3\|(B - B_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(A - A_n)\| \\
&+ |z|^3\|(A - A_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(B - B_n)\| + |z|^2\|(B - B_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(B - B_n)\| \\
&+ |z|^2\|(A - A_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(C - C_n)\| + |z|^2\|(C - C_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(A - A_n)\| \\
&+ |z|\|(B - B_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(C - C_n)\| + |z|\|(C - C_n)\,\mathrm{R_Q}(z)(B - B_n)\|) \\
&\leq \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2} < 1.
\end{aligned}$$

Donc d'après la condition

$$\left\|\left[\left(Q(z) - \tilde{Q}(z)\right)\mathrm{R_Q}(z)\right]^2\right\| < 1,$$

l'opérateur

$$\mathrm{R_{Q_n}}(z) = (z^2 A_n + z B_n + C_n)^{-1}$$

existe et est borné. Par conséquent $z \in \mathrm{re}(A_n, B_n, C_n)$, donc $\Omega \subset \mathrm{re}(A_n, B_n, C_n)$ pour tout n assez grand.

Comme la suite des valeurs spectrales approchées λ_n converge vers la valeur exacte λ, et $\lambda_n \in \Omega \subset \mathrm{re}(A_n, B_n, C_n)$ pour tout n, λ_n n'est pas dans le spectre $\mathrm{sp}(A_n, B_n, C_n)$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de la propriété U ($\lambda_n \in \mathrm{sp}(A_n, B_n, C_n)$) pour tout n. Par conséquent, λ doit être dans $\mathrm{sp}(A, B, C)$.

□

3.2.3 Propriété U sous la $\nu -$ convergence généralisée (notée $\xrightarrow{\nu_g}$)

Dans cette section, on va introduire une nouvelle convergence, appelé $\nu -$ convergence généralisée, où la propriété U sera toujours réalisable sous des conditions plus faibles que $(\mathcal{H}1)$ et $(\mathcal{H}2)$. Pour cela, on va faire une extension de la nouvelle notion de $\nu -$ convergence généralisée.

La définition suivante permet d'introduire la $\nu -$ convergence généralisée.

Définition 3.2.1

Soient A_n, B_n, C_n, A, B, C des opérateurs dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$. On dit que le triplet des suites d'opérateurs (A_n, B_n, C_n) converge en $\nu -$ convergence généralisée vers le triplet d'opérateurs (A, B, C), et on note $(A_n, B_n, C_n) \xrightarrow{\nu_g} (A, B, C)$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) *Les normes $\|A_n\|, \|B_n\|$ and $\|C_n\|$ sont bornées indépendamment de n.*

(ii) $\|(A_n - A)\, L_n\| \to 0,\ \|(B_n - B)\, L_n\| \to 0,\ \|(C_n - C)\, L_n\| \to 0,$ *pour n tend vers l'infini où L_n prendra toutes les suites A_n, B_n et C_n,($L_n \in \{A_n, B_n, C_n\}$).*

(iii) $\|(A_n - A)\, L\| \to 0,\ \|(B_n - B)\, L\| \to 0,\ \|(C_n - C)\, L\| \to 0,$ *pour n tend vers l'infini où L prendra tous les opérateurs A, B et C, ($L \in \{A, B, C\}$).*

Remarque 3.2.1

Cette $\nu -$ convergence généralisée sera développée pour le traitement du spectre quadratique

généralisé de la forme $\mathrm{sp}(A, B, I+D)$ *, où* I *est l'opérateur identité dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$*, et* A, B, D *sont trois opérateurs dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$.

On considère le problème spectral quadratique généralisé sous la nouvelle forme $\mathrm{sp}(A, B, I+D)$ tel que

$$\text{Trouver } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } u \in \mathcal{B}-\{0\} \text{ tel que } \lambda^2 Au + \lambda Bu + (I+D)u = 0. \tag{3.25}$$

Dans le théorème suivant, nous allons prouver la convergence du spectre quadratique généralisé associé au probème (3.25), au sens de la propriété U, sous la $\nu-$convergence généralisée.

Théorème 3.2.4
Soient $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites d'opérateurs dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$*,*
où les opérateurs A_n, B_n *et* D_n *vérifient l'hypothèse suivante :*

$$(\mathcal{H}3) \quad (A_n, B_n, D_n) \xrightarrow{\nu_g} (A, B, D).$$

Alors la propriété U (pour $\lambda_n \in \mathrm{sp}(A_n, B_n, I+D_n)$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *telle que* λ_n *converge vers* λ *dans* $\mathbb{C}$ *alors* $\lambda \in \mathrm{sp}(A, B, I+D)$*) est satisfaite.*

Preuve.

La démonstration de ce théorème est basée sur le raisonnement par l'absurde.
On suppose que $\lambda \in \mathrm{re}(A, B, I+D)$. Comme l'ensemble résolvant quadratique généralisé $\mathrm{re}(A, B, I+D)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$, il existe un scalaire $\delta > 0$ tel que

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-\lambda| \leq \delta\} \subset \mathrm{re}(A, B, I+D).$$

De plus, la résolvante quadratique généralisée $\mathrm{R_Q}(\cdot)$ est analytique sur l'ensemble $\mathrm{re}(A, B, C)$, et on peut définir le réel β par

$$\alpha = \sup\{\|R_Q(z)\| : z \in \Omega\} < \infty.$$

On cherche à montrer que l'ensemble Ω est inclus dans l'ensemble $\mathrm{re}(A_n, B_n, C_n)$. Pour cela, il suffit de prouver que pour tout $z \in \Omega$ alors $z \in \mathrm{re}(A_n, B_n, I+D_n)$, c'est à dire on montre que l'opérateur $\mathrm{R_{Q_n}}(z) = (z^2 A_n + zB_n + C_n)^{-1}$ existe et est borné.

Pour tout $z \in \Omega$, on pose

$$Q_n(z) = z^2 A_n + z B_n + (I + D_n)$$

et

$$Q(z) = z^2 A + z B + (I + D).$$

D'une part, on va développer le terme $[(Q(z) - Q_n(z)) \,\mathrm{R_Q}(z)]^2$, en utilisant l'egalité présentée dans le **Théorèm 2.5.4(b)**, qui nous permet d'écrire $\mathrm{R_Q}(z)$ sous la forme suivante :

$$\mathrm{R_Q}(z) = I - z^2 A \,\mathrm{R_Q}(z) - z B \,\mathrm{R_Q}(z) - D \,\mathrm{R_Q}(z).$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
[(Q(z) - Q_n(z)) \,\mathrm{R_Q}(z)]^2 &= (Q(z) - Q_n(z)) \,\mathrm{R_Q}(z)(Q(z) - Q_n(z)) \,\mathrm{R_Q}(z) \\
&= (Q(z) - Q_n(z)) \left[I - z^2 A \,\mathrm{R_Q}(z) - z B \,\mathrm{R_Q}(z) - D \,\mathrm{R_Q}(z)\right] \\
&\quad (Q(z) - Q_n(z)) \,\mathrm{R_Q}(z) \\
&= [(Q(z) - Q_n(z))Q(z) - (Q(z) - Q_n(z))Q_n(z) \\
&- z^2(Q(z) - Q_n(z))A \,\mathrm{R_Q}(z)(Q(z) - Q_n(z)) - z(Q(z) - Q_n(z))B \,\mathrm{R_Q}(z) \\
&\quad (Q(z) - Q_n(z)) - (Q(z) - Q_n(z))D \,\mathrm{R_Q}(z)(Q(z) - Q_n(z))] \,\mathrm{R_Q}(z)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

D'autre part, du fait que $\|A_n\|, \|B_n\|$ et $\|D_n\|$ sont bornés, , il existe $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ tels que $\|A - A_n\| \leq t_1, \|B - B_n\| \leq t_2$ et $\|D - D_n\| \leq t_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'après $(\mathcal{H}3)$, on a

$$\|\,(A_n - A)\,L_n\|, \|\,(B_n - B)\,L_n\|, \|\,(D_n - D)\,L_n\| \to 0, L_n \in \{A_n, B_n, D_n\}$$

et

$$\|\,(A_n - A)\,L\|, \|\,(B_n - B)\,L\|, \|\,(D_n - D)\,L\| \to 0, L \in \{A, B, D\}\,.$$

De plus, on suppose que pour $z \in \Omega$, et $t_0 = \max(t_1, t_2, t_3)$, ils existent des entiers naturels $n_i, i = \overline{1, 18}$ vérifiant

$$\|(A - A_n)A\| \leq \frac{1}{36\alpha(r + |\lambda^2 + (\lambda^6 + \lambda^5 + \lambda^4)\alpha t|)}, \quad n \geq n_1, \tag{3.27}$$

$$\|(A - A_n)A_n\| \leq \frac{1}{36\alpha(r + |\lambda|^4)}, \quad n \geq n_4, \tag{3.28}$$

$$\|(A-A_n)B\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda^3+(\lambda^5+\lambda^4+\lambda^3)\alpha t|)}, \quad n \geq n_2, \tag{3.29}$$

$$\|(A-A_n)B_n\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda|^3)}, \quad n \geq n_5, \tag{3.30}$$

$$\|(A-A_n)D\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda^2+(\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2)\alpha t|)}, \quad n \geq n_3, \tag{3.31}$$

$$\|(A-A_n)D_n\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda|^2)}, \quad n \geq n_6, \tag{3.32}$$

$$\|(B-B_n)A\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda^3+(\lambda^5+\lambda^4+\lambda^3)\alpha t|)}, \quad n \geq n_7, \tag{3.33}$$

$$\|(B-B_n)A_n\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda|^3)}, \quad n \geq n_{10}, \tag{3.34}$$

$$\|(B-B_n)B\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda^2+(\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2)\alpha t|)}, \quad n \geq n_8, \tag{3.35}$$

$$\|(B-B_n)B_n\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda|^2)}, \quad n \geq n_{11}, \tag{3.36}$$

$$\|(B-B_n)D\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda+(\lambda^3+\lambda^2+\lambda)\alpha t|)}, \quad n \geq n_9, \tag{3.37}$$

$$\|(B-B_n)D_n\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda|)}, \quad n \geq n_{12}, \tag{3.38}$$

$$\|(D-D_n)A\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda^2+(\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2)\alpha t|)}, \quad n \geq n_{13}, \tag{3.39}$$

$$\|(D-D_n)A_n\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda|^2)}, \quad n \geq n_{16}, \tag{3.40}$$

$$\|(D-D_n)B\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda+(\lambda^3+\lambda^2+\lambda)\alpha t|)}, \quad n \geq n_{14}, \tag{3.41}$$

$$\|(D-D_n)B_n\| \leq \frac{1}{36\alpha(r+|\lambda|)}, \quad n \geq n_{17}, \tag{3.42}$$

$$\|(D-D_n)D\| \leq \frac{1}{36\alpha|1+(\lambda^2+\lambda+1)\alpha t|}, \quad n \geq n_{15}, \tag{3.43}$$

$$\|(D - D_n)D_n\| \leq \frac{1}{36\alpha}, \quad n \geq n_{18}. \tag{3.44}$$

En utilisant les inégalités précédentes de manière similaire aux cas de preuves des **théorèmes 3.2.2 et 3.2.3**, on montre que

$$\left\| [(Q(z) - Q_n(z)) \, \mathrm{R_Q}(z)]^2 \right\| < 1.$$

Pour tout $n \geq \max\{n_i, 1 \leq i \leq 18\}$, on obtient

$$\left\| [(Q(z) - Q_n(z)) \, \mathrm{R_Q}(z)]^2 \right\| \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Ceci montre que

$$\mathrm{R_{Q_n}}(z) = (z^2 A_n + z B_n + (I + D_n))^{-1}$$

existe et est borné, et $z \in \mathrm{re}(A_n, B_n, I + D_n)$. Donc, $\Omega \subset \mathrm{re}(A_n, B_n, I + D_n)$ pour tout n assez grand.

Comme la suite des valeurs spectrales approchées λ_n converge vers la valeur exacte λ et $\lambda_n \in \Omega \subset \mathrm{re}(A_n, B_n, I + D_n)$ pour tout n, λ_n n'est pas dans le spectre $\mathrm{sp}(A, B, I + D)$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de la propriété U ($\lambda_n \in \mathrm{sp}(A_n, B_n, I + D_n)$ pour tout n). Par conséquent, λ doit être dans $\mathrm{sp}(A, B, I + D)$.

□

Remarque 3.2.2

- *Si le triplet* (A_n, B_n, D_n) *converge en norme vers le triplet* (A, B, D)

$$(A_n, B_n, D_n) \xrightarrow{n} (A, B, D)$$

  alors le triplet (A_n, B_n, D_n) *converge en* $\nu-$*convergence généralisée vers le triplet* (A, B, D) *(*$(A_n, B_n, D_n) \xrightarrow{\nu_g} (A, B, D)$*).*
- *Si* $(A_n, B_n, D_n) \xrightarrow{cc} (A, B, D)$ *et les opérateurs* A, B *et* D *sont compacts, alors*

$$(A_n, B_n, D_n) \xrightarrow{\nu_g} (A, B, D) \, .$$

3.3 Approximation du spectre quadratique généralisé au sens de la propriété L

Dans cette section, on va prouver que la propriété L est réalisable, et on va établir un nouveau cadre théorique pour appliquer la méthode d'approximation spectrale généralisée au problème spectral quadratique. De plus, on va étendre la méthode d'approximation développée dans le cas du spectre généralisé au spectre quadratique généralisé afin de prouver la convergence de ce dernier au sens de la propriété L, sous la convergence en norme et la convergence en collectivement compact.

3.3.1 Transformation du problème spectral quadratique en problème spectral généralisé dans l'espace $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$

Dans cette partie, on va démontrer une équivalence entre la résolvante généralisée et la résolvante quadratique généralisée moyennant certaines transformations.

Le problème du spectre quadratique généralisé se transforme grâce à cet outil en problème du spectre généralisé.

Ainsi,

– On note par $\mathcal{X} = \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, l'espace de Banach associé à la norme suivante :

$$\forall\, U = (u_1, u_2) \in \mathcal{X},\ \|U\|_{\mathcal{X}} = \|u_1\|_{\mathcal{B}} + \|u_2\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.45}$$

– On note par $\mathrm{BL}(\mathcal{X})$, l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés définis sur $\mathcal{X}$ dans lui même, et sa norme est donnée par

$$\forall \mathbf{A} \in \mathrm{BL}(\mathcal{X}) : \quad \|\mathbf{A}\|_{\bullet} = \sup_{\|U\|_{\mathcal{X}}=1} \|\mathbf{A}U\|_{\mathcal{X}}. \tag{3.46}$$

Le théorème suivant permet de montrer l'équivalence entre la résolvante généralisée et la résolvante quadratique généralisée.

Théorème 3.3.1

Soient A, B et C trois opérateurs dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$, et $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Si l'opérateur C commute avec $\mathrm{R_Q}(z_1)$ et $\mathrm{R_Q}(z_2)$, avec $z_1, z_2 \in \mathrm{re}(A, B, C) \setminus \{0\}$, alors,

$$Q(z) = z^2 A + zB + C \quad \textit{est inversible si et seulement si } z \in \mathrm{re}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}),$$

où, les opérateurs $\boldsymbol{T}$ *et* $\boldsymbol{S}$ *sont dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{X})$*, donnés par la représentation matricielle suivante :*

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} B & C \\ -I & O \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} -A & O \\ O & -I \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

I *et* O *sont respectivement les opérateurs identité et nul dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$*.*

Preuve.

Pour montrer ce théorème il faut établir que l'opérateur inverse

$$[Q(z)]^{-1} = \left(z^2A + zB + C\right)^{-1}$$

existe si et seulement si $z \in \mathrm{re}(\mathbf{T}, \mathbf{S})$,c-à-d,

$$(\mathbf{T} - z\mathbf{S})^{-1}$$

existe.

On commence par montrer que si

$$[Q(z)]^{-1} = \left(z^2A + zB + C\right)^{-1}$$

existe, alors

$$(\mathbf{T} - z\mathbf{S})^{-1}$$

existe.

Tout d'abord, on montre que les opérateurs $[Q(z)]$ et $(\mathbf{T} - z\mathbf{S})$ sont bornés.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a alors,

$$(\mathbf{T} - z\mathbf{S}) = \begin{pmatrix} B + zA & C \\ -I & zI \end{pmatrix}$$

D'après l'écriture des opérateurs $Q(z)$ et $(\mathbf{T} - z\mathbf{S})$, on remarque que ces derniers sont bornés.

En effet, par un calcul des normes on a

$$\|\mathbf{T}\| = \max_{1\leq i\leq 2} \sum_{j=1}^{2} \|T_{ij}\|_{\mathcal{B}} = \max(\|B\|_{\mathcal{B}} + \|C\|_{\mathcal{B}}, \|I\|_{\mathcal{B}}), \tag{3.48}$$

et

$$\|\mathbf{S}\| = \max_{1\leq i\leq 2} \sum_{j=1}^{2} \|S_{ij}\|_{\mathcal{B}} = \max(\|A\|_{\mathcal{B}}, \|I\|_{\mathcal{B}}). \tag{3.49}$$

En utilisant la bornétude des opérateurs A, B, C, on prouve que l'opérateur $(\mathbf{T} - z\mathbf{S})$ est borné.

Maintenant, on suppose que $Q(z)^{-1}$ existe et on va montrer que l'opérateur inverse de $(\mathbf{T}-z\mathbf{S})$ existe pour tout $z \neq 0$.

D'après l'application des calculs d'inverse d'une matrice sur le block d'opérateurs $(\mathbf{T}-z\mathbf{S})$, on obtient

$$\begin{pmatrix} zQ(z)^{-1} & -Q(z)^{-1}C \\ Q(z)^{-1} & Q(z)^{-1}(B+zA) \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

En effet, il suffit de prouver que (3.50) est l'inverse à gauche et à droite de $(\mathbf{T}-z\mathbf{S})$. Pour l'existence de l'inverse à droite, en utilisant la multiplication des matrices, on a

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}-z\mathbf{S})\begin{pmatrix} zQ(z)^{-1} & -Q(z)^{-1}C \\ Q(z)^{-1} & Q(z)^{-1}(B+zA) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B+zA & C \\ -I & zI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} zQ(z)^{-1} & -Q(z)^{-1}C \\ Q(z)^{-1} & Q(z)^{-1}(B+zA) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & -(B+zA)Q(z)^{-1}C + CQ(z)^{-1}(B+zA) \\ O & I \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'après le résultat obtenu dans **(a)** du **théorème 2.5.5**, on obtient

$$(\mathbf{T}-z\mathbf{S})\begin{pmatrix} zQ(z)^{-1} & -Q(z)^{-1}C \\ Q(z)^{-1} & Q(z)^{-1}(B+zA) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}.$$

Pour l'inverse à gauche, on procède de manière similaire au traitement du cas précédent. En utilisant encore le résultat obtenu dans **(a)** du **théorème 2.5.5**, on obtient

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} zQ(z)^{-1} & -Q(z)^{-1}C \\ Q(z)^{-1} & Q(z)^{-1}(B+zA) \end{pmatrix}(\mathbf{T}-z\mathbf{S}) = \begin{pmatrix} zQ(z)^{-1} & -Q(z)^{-1}C \\ Q(z)^{-1} & Q(z)^{-1}(B+zA) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B+zA & C \\ -I & zI \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} zQ(z)^{-1}(B+zA)+Q(z)^{-1}C & zQ(z)^{-1}C - zQ(z)^{-1}C \\ Q(z)^{-1}(B+zA)-Q(z)^{-1}(B+zA) & Q(z)^{-1}C+Q(z)^{-1}(zB+z^2A) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Alors, l'inverse à gauche et à droite de l'opérateur $(\mathbf{T}-z\mathbf{S})$ existe si $Q(z)^{-1}$ existe, et l'inverse de l'opérateur $(\mathbf{T}-z\mathbf{S})$ est donné par

$$(\mathbf{T}-z\mathbf{S})^{-1} = \begin{pmatrix} zQ(z)^{-1} & -Q(z)^{-1}C \\ Q(z)^{-1} & Q(z)^{-1}(B+zA) \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

Maintenant, on va montrer que si l'inverse de l'opérateur $(\mathbf{T}-z\mathbf{S})$ existe alors $Q(z)^{-1}$ existe. En effet, pour tout $z \neq 0$, si $(\mathbf{T}-z\mathbf{S})^{-1}$ existe, on peut l'écrire sous forme d'une matrice par blocs de la manière suivante :

$$(\mathbf{T}-z\mathbf{S})^{-1} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

où $K_{ij} \in \mathrm{BL}(\mathcal{B}), \;\; i,j = 1,2$. On a alors

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B+zA & C \\ -I & zI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}, \tag{3.53}$$

où

$$\begin{pmatrix} B+zA & C \\ -I & zI \end{pmatrix} = (\mathbf{T} - z\mathbf{S}) \tag{3.54}$$

(3.53) peut s'écrire sous forme du système suivant :

$$\begin{cases} (1) & K_{11}(B+zA) - K_{12} & = I \\ (2) & K_{11}C + zK_{12} & = O \\ (3) & K_{21}(B+zA) - K_{22} & = I \\ (4) & K_{21}C + zK_{22} & = O, \end{cases} \tag{3.55}$$

Ainsi, à partir de l'équation (2) dans (3.55), on a

$$K_{12} = -\frac{1}{z}K_{11}C.$$

En remplaçant K_{12} dans la première équation du système (3.55) et en mettant $\frac{1}{z}K_{11}$ en facteur, on obtient

$$\frac{1}{z}K_{11}(z^2A + zB + C) = \frac{1}{z}K_{11}Q(z) = I. \tag{3.56}$$

Ceci montre que l'inverse $Q(z)^{-1}$ existe.

D'après les deux implications montrées ci dessus, on conclut que

$$Q(z) = z^2A + zB + C \;\text{ est inversible si et seulement si } z \in \mathrm{re}(\mathbf{T}, \mathbf{S}), \forall z \neq 0.$$

□

Le lemme suivant nous permet de montrer que si les suites d'opérateurs A_n, B_n et C_n dans $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$ convergent en norme et en collectivement compact, alors les suites de matrices par blocs d'opérateurs $\mathbf{T}_n$ et $\mathbf{S}_n$ dans $\mathrm{BL}(\mathcal{X})$, convergent aussi en norme et en collectivement compact.

Lemme 3.3.1

Soient $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{S}$ deux matrices par blocs d'opérateurs dans $\mathrm{BL}(\mathcal{X})$ *défini comme dans* (3.47)*.*

Soient $\boldsymbol{S}_n$ et $\boldsymbol{T}_n$ deux suites de matrices par blocs d'opérateurs dans $\mathrm{BL}(\mathcal{X})$ *données par,*

$$\boldsymbol{T}_n = \begin{pmatrix} B_n & C_n \\ -I & O \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_n = \begin{pmatrix} -A_n & O \\ O & -I \end{pmatrix},$$

(i) *Soit l'hypothèse* $(\mathcal{H}1) : \; A_n \xrightarrow{n} A, \; B_n \xrightarrow{n} B, \; C_n \xrightarrow{n} C$*. Alors*

$$(\mathcal{H}'1) : \quad \boldsymbol{T}_n \xrightarrow{n} \boldsymbol{T}, \;\; \boldsymbol{S}_n \xrightarrow{n} \boldsymbol{S}.$$

(ii) *Soit l'hypothèse* $(\mathcal{H}2)$: $A_n \overset{cc}{\rightarrow} A, \;\; B_n \overset{cc}{\rightarrow} B, \;\; C_n \overset{cc}{\rightarrow} C$. *Alors*

$$(\mathcal{H}'2): \quad \boldsymbol{T}_n \overset{cc}{\rightarrow} \boldsymbol{T}, \;\; \boldsymbol{S}_n \overset{cc}{\rightarrow} \boldsymbol{S}.$$

Ici $\overset{n}{\rightarrow}$ *et* $\overset{cc}{\rightarrow}$ *désignent la convergence en norme et la convergence en collectivement compact respectivement.*

Preuve.

(i) On va montrer que les suites $\mathbf{T}_n$ et $\mathbf{S}_n$ convergent en norme vers $\mathbf{T}$ et $\mathbf{S}$ respectivement.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\|\mathbf{T}_n - \mathbf{T}\| = \max(\|B_n - B\| + \|C_n - C\|, \|O\|), \tag{3.57}$$

et

$$\|\mathbf{S}_n - \mathbf{S}\| = \max(\|A - A_n\|, \|O\|). \tag{3.58}$$

En utilisant $(\mathcal{H}1)$, on obtient $\|\mathbf{T}_n - \mathbf{T}\| \rightarrow 0$ et $\|\mathbf{S}_n - \mathbf{S}\| \rightarrow 0$.

Cela prouve que les deux suites $\mathbf{T}_n$ et $\mathbf{S}_n$ convergent en norme vers $\mathbf{T}$ et $\mathbf{S}$ dans $\mathrm{BL}(\mathcal{X})$ respectivement, et **(i)** est vérifié.

(ii) Pour montrer que $\mathbf{T}_n$ et $\mathbf{S}_n$ convergent vers $\mathbf{T}$ et $\mathbf{S}$ en collectivement compact $\mathrm{BL}(\mathcal{X})$ respectivement, on va prouver les points suivants :

1. On montre que $\mathbf{T}_n \overset{p}{\rightarrow} \mathbf{T}$ et $\mathbf{S}_n \overset{p}{\rightarrow} \mathbf{S}$ ($\overset{p}{\rightarrow}$ désigne la convergence ponctuelle).

   Soient $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\|(\mathbf{T}_n - \mathbf{T})x\|_{\mathcal{X}} = \max(\|(B_n - B)x_1\|_{\mathcal{B}} + \|(C_n - C)x_2\|_{\mathcal{B}}, \|O\|_{\mathcal{B}}),$$

$$\|(\mathbf{S}_n - \mathbf{S})x\|_{\mathcal{X}} = \max(\|(A - A_n)x_1\|_{\mathcal{B}}, \|O\|_{\mathcal{B}}),$$

   où O désigne l'opérateur nul. Selon l'hypothèse $(\mathcal{H}2)$, on a

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \|(\mathbf{T}_n - \mathbf{T})x\|_{\mathcal{X}} = \lim_{n\rightarrow\infty} \|(\mathbf{S}_n - \mathbf{S})x\|_{\mathcal{X}} = 0.$$

   Ceci prouve que $\mathbf{T}_n$ et $\mathbf{S}_n$ convergent ponctuellement vers $\mathbf{T}$ et $\mathbf{S}$ dans $\mathrm{BL}(\mathcal{X})$ respectivement.

2. Pour n_0 et n_1 dans $\mathbb{N}$, on va prouver que les ensembles suivants

$$\Omega_1 = \bigcup_{n\geq n_0} \{\mathbf{T}_n x - \mathbf{T}x \ : x \in \mathcal{X}, \ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}$$

et

$$\Omega_2 = \bigcup_{n\geq n_1} \{\mathbf{S}_n x - \mathbf{S}x \ : x \in \mathcal{X}, \ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}$$

sont des sous-ensembles relativement compacts de $\mathcal{X}$.
En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \bigcup_{n\geq n_0} \{(B_n - B)x_1 + (C_n - C)x_2 \ : x_1, x_2 \in \mathcal{B}, \ \|x_1\|_{\mathcal{B}} \leq 1, \ \|x_2\|_{\mathcal{B}} \leq 1\} \times \{O\} \\ \Omega_2 &= \bigcup_{n\geq n_1} \{(A_n - A)x_1 \ : x_1 \in \mathcal{B}, \ \|x_1\|_{\mathcal{B}} \leq 1\} \times \{O\}. \end{aligned}$$

D'après $(\mathcal{H}2)$, les ensembles

$$\{(B_n - B)x_1 + (C_n - C)x_2 \ : x_1, x_2 \in \mathcal{B}, \ \|x_1\|_{\mathcal{B}} \leq 1, \ \|x_2\|_{\mathcal{B}} \leq 1\} \tag{3.59}$$

et

$$\{(A_n - A)x_1 \ : x_1 \in \mathcal{B}, \ \|x_1\|_{\mathcal{B}} \leq 1\} \tag{3.60}$$

sont relativement compacts dans $\mathcal{B}$.

Par ailleurs, il est clair que le singleton opérateur nul $\{O\}$ est un ensemble relativement compact de $\mathcal{B}$, et comme le produit de deux ensembles relativement compacts est un ensemble relativement compact, on obtient que Ω_1 et Ω_2 sont des ensembles relativement compacts dans $\mathcal{X}$.

D'après les points (1) et (2), on conclut que $\mathbf{S}_n$ et $\mathbf{T}_n$ convergent dans un sens collectivement compact vers $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ respectivement.

□

3.3.2 Propriété L pour le spectre quadratique généralisé

On va montrer que les techniques utilisées dans le cas généralisé peuvent s'étendre aux matrices de blocs d'opérateurs, car les opérateurs $\mathbf{T}_n, \mathbf{S}_n, \mathbf{T}$ et $\mathbf{S}$ satisfont aux conditions utilisées dans l'étude du spectre généralisé. Maintenant, nous appliquons les techniques et

résultats du paragraphe précédent pour démontrer notre résultat principal à savoir que la propriété L est réalisable. Ceci sera prouvé dans le théorème suivant.

Théorème 3.3.2

Soient $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites d'opérateurs dans* $\mathrm{BL}(\mathcal{B})$.
Soit λ *une valeur spectrale quadratique généralisée isolée dans* $\mathrm{sp}(A, B, C)$. *Supposons que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée, à savoir*

$$(\mathcal{H}4): \ \lambda \neq 0, \ et \ A_n \xrightarrow{n} A, \ \ B_n \xrightarrow{n} B, \ \ C_n \xrightarrow{n} C$$

ou

$$(\mathcal{H}5): \ \lambda \neq 0, \ et \ A_n \xrightarrow{cc} A, \ \ B_n \xrightarrow{cc} B, \ \ C_n \xrightarrow{cc} C$$

Alors, s'il existe une suite $\lambda_n \in \mathrm{sp}(A_n, B_n, C_n)$, *pour* n *assez grand, alors* λ_n *converge vers* λ *dans* $\mathbb{C}$.

Preuve.

Soient $\lambda \in \mathrm{sp}(A, B, C)$ et Γ un contour de Cauchy, qui sépare λ de $\mathrm{sp}(A, B, C)\setminus\{\lambda\}$.Ce qui implique d'après le **théorème 3.3.1** que $\lambda \in \mathrm{sp}(\mathbf{T}, \mathbf{S})$.

On définit la suite λ_n comme suit :

$$\lambda_n = \mathrm{int}(\Gamma) \cap \mathrm{sp}(\mathbf{T}_n, \mathbf{S}_n). \tag{3.61}$$

On fixe $r' > 0$ tel que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à l'ensemble :

$$E := \{z \in \mathbb{C} : \quad |\lambda - z| \leq r'\}.$$

Maintenant, on va prouver que $\lambda_n \to \lambda$, dans $\mathbb{C}$, avec $\lambda \in \mathrm{sp}(\mathbf{T}, \mathbf{S})$. Pour cette raison, il suffit de montrer que toute sous-suite $(\lambda_{n(k)})$ de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers λ.
Soit $(\lambda_{n(k)})$ une sous-suite qui converge vers $\tilde{\lambda} \neq \lambda$. Puisque la propriété U est réalisable sous les convergences en norme et en collectivement compacte, on a $\tilde{\lambda} \in \mathrm{sp}(\mathbf{T}, \mathbf{S})$. Mais, $\tilde{\lambda} \in E$ et $\mathrm{sp}(\mathbf{T}, \mathbf{S}) \cap E := \{\lambda\}$. Par conséquent, $\lambda = \tilde{\lambda}$, et donc $\lambda_n \to \lambda$, ce qu'il fallait démontrer.

□

Remarque 3.3.1

Sous les conditions $(\mathcal{H}4)$ *et* $(\mathcal{H}5)$, *on peut montrer que la propriété U est aussi réalisable, en suivant de manière similaire la procédure précédente qui nous a permis la réalisation de la propriété L.*

3.4 Conclusion

Ce chapitre représente le résultat essentiel de notre recherche, à savoir une extention assez rigoureuse du cas généralisé au cas quadratique généralisé. Ceci a nécessité une généralisation de certaines propriétés et techniques classiques, qui nous ont permis la construction et l'adoption d'un nouveau type de convergence appelé $\nu-$convergence généralisée.

Ce nouveau concept donne une approximation pour le spectre quadratique généralisé de $(A; B; I + D)$, où les opérateurs sont seulement bornés. Ainsi, on a montré la réalisation de la propriété U sous les trois types de convergence (la convergence en norme, la convergence en collectivement compact et la $\nu-$ convergence généralisé). De plus, en se basant sur le bloc d'opérateurs, notre problème du spectre quadratique généralisé, moyennant certaines techniques, est transformé en un problème du spectre généralisé dans un espace produit, où la propriété L s'avère réalisable sous la convergence en norme et la convergence en collectivement compact pour toute valeur spectrale non nulle.

Chapitre 4

Application sur le pencil quadratique de l'opérateur de Schrödinger

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va appliquer la méthode du spectre quadratique généralisé au pencil quadratique de l'opérateur de Schrödinger. Ensuite on réalise quelques tests numériques pour valider nos résultats théoriques, afin de confirmer l'efficacité de notre méthode.

4.2 Construction d'un exemple de validation

On va étudier "le pencil quadratique" de l'opérateur de Schrödinger, défini dans $L^2([0,+\infty[)$ par l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$(P)\begin{cases} -y'' + (V(x) + 2\lambda U(x) - \lambda^2)y = 0, & x \in [0,+\infty[, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

où, V, U sont des fonctions complexes et λ un paramètre spectral.
Dans toute la suite, on choisit les fonctions $V(x) = x^2$ et $U(x) = -\dfrac{1}{2}$, de sorte que le problème (P) s'écrit :

$$(P')\begin{cases} -y'' + (x^2 - \lambda + \lambda^2)y = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Cependant l'étude approfondie du spectre quadratique généralisé, nécessite l'introduction de l'opérateur non borné $S : \mathcal{D}(S) \to L^2([0,+\infty[)$ donné par

$$Sy = -y'' + x^2 y,\ x \in [0,+\infty[, \tag{4.1}$$

où, S est l'oscillateur harmonique défini sur le domaine

$$\mathcal{D}(S) = H^2([0,+\infty[) \cap \left\{\varphi \in L^2([0,+\infty[) :\ \int_0^{+\infty} x^2|\varphi(x)|^2 dx < +\infty\right\}$$

dans $L^2([0,+\infty[)$.
Pour $a \in]0,+\infty[$, on introduit l'opérateur S_a donné par

$$S_a y = -y'' + x^2 y,\ y \in \mathcal{D}(S_a) = H^2(0,a),$$

Remarque 4.2.1

Pour calculer le spectre de l'opérateur S, on a besoin d'introduire la relation $\forall a > 0, \quad \mathrm{sp}(S_a) \subset \mathrm{sp}(S)$ *qui permet de déduire le spectre de l'opérateur S à partir du spectre des opérateurs S_a définis sur des intervalles bornés de la forme* $(0,a]$.

Par conséquent, d'après la remarque ci-dessus, on définit l'opérateur Laplacien noté L_p, par

$$\begin{aligned} L_p : \mathcal{D}(L_p) &\rightarrow L^2(0,a), \\ y &\mapsto L_p y = -y'', \end{aligned}$$

où le domaine $\mathcal{D}(L_p)$ de L_p vérifie

$$\mathcal{D}(L_p) = \{y \in H^2(0,a), y(0) = y(a) = 0\} = H_0^2(0,a).$$

Le théorème suivant permet de montrer que l'opérateur Laplacien L_p est inversible.

Théorème 4.2.1

L'opérateur L_p est un opérateur inversible et son inverse est l'opérateur noté A défini sur $L^2(0,a)$ par

$$Ay(x) = \int_0^a K_a(x,t)y(t)dt, \tag{4.2}$$

où K_a est le noyau de Green donné par

$$K_a(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(a-t)}{a} & si \;\; 0 \leq x \leq t \leq a, \\ \dfrac{t(a-x)}{a} & si \;\; 0 \leq t \leq x \leq a. \end{cases} \tag{4.3}$$

Preuve. Voir [25], [10].

En utilisant le théorème précédent, on peut transformer le problème non borné (P'_a), défini ci-dessus, en un problème spectral quadratique associé à trois opérateurs bornés, en appliquant l'opérateur inverse du Laplacien. Cette transformation nous permet de définir les opérateurs bornés B et C, qui agissent tous les deux sur l'espace $L^2(0,a)$, selon les deux formules suivantes :

$$By(x) = -\int_0^a K_a(x,t)y(t)dt, \tag{4.4}$$

et

$$Cy(x) = y(x) + \int_0^a K_a(x,t)t^2y(t)dt. \tag{4.5}$$

Le théorème suivant montre l'équivalence entre le problème des valeurs propres (P'_a) qui est donné par,

Trouver $\mu = \lambda - \lambda^2 \in \mathbb{C}$ et $y \in \mathcal{D}(S_a) - \{0\}$ tel que

$$(P'_a) \begin{cases} -y'' + x^2 y = \mu y, \\ y(0) = y(a) = 0. \end{cases}$$

et le problème de valeurs propres quadratiques généralisées associées aux opérateurs A, B et C.

Théorème 4.2.2

Le problème de valeurs propres (P'_a) est équivalent au problème de valeurs propres quadratiques associé au problème suivant :

$$(Q): \; Q(\lambda)y = \lambda^2 Ay + \lambda By + Cy = 0. \tag{4.6}$$

Ainsi, λ est une valeur propre quadratique de S_a si et seulement si λ est une valeur propre quadratique généralisée de trois opérateurs bornés (A, B, C).

Preuve.

Soient λ une valeur propre quadratique de S_a et $y \in \mathcal{D}(S_a)$ le vecteur propre associé à λ. Par conséquent

$$S_a y = (\lambda - \lambda^2)y. \tag{4.7}$$

En explicitant S_a, on peut écrire l'équation 4.7 sous la forme suivante :

$$L_p y + x^2 y - \lambda y + \lambda^2 y = 0, \tag{4.8}$$

où L_p l'opérateur Laplacien.

En appliquant l'opérateur inverse A de l'opérateur L_p à l'équation 4.8, on obtient

$$\lambda^2 Ay + \lambda By + Cy = 0, \tag{4.9}$$

où

$$Ay(x) \;=\; \int_0^a K_a(x,t)y(t)dt. \tag{4.10}$$

$$By(x) = -\int_0^a K_a(x,t)y(t)dt, \tag{4.11}$$

$$Cy(x) = y(x) + \int_0^a K_a(x,t)t^2 y(t)dt, \tag{4.12}$$

Par conséquent, λ est une valeur propre quadratique généralisée de (A, B, C) et y est le vecteur propre quadratique généralisé associé à λ.

Inversement, soient λ une valeur propre quadratique généralisée de (A, B, C), et $y \in L^2(0, a) \setminus \{0\}$ le vecteur propre associé à λ. On a alors

$$\lambda^2 Ay + \lambda By + Cy = 0. \tag{4.13}$$

Par conséquent,

$$\lambda^2 Ay - \lambda \int_0^a K_a(x,t)y(t)dt + y(x) + \int_0^a K_a(x,t)t^2 y(t)dt = 0. \tag{4.14}$$

Ceci est équivalent à

$$\lambda^2 Ay - \lambda Ay + y + A(x^2 y) = 0. \tag{4.15}$$

Comme A est un opérateur linéaire, on a

$$y = A(\lambda y - \lambda^2 y - x^2 y), \tag{4.16}$$

pour $y \in \mathcal{D}(L_p)$, et donc, $(\lambda y - \lambda^2 y - x^2 y) \in L^2(0, a)$.
En appliquant L_p à l'équation 4.16, on obtient

$$L_p y = \lambda y - \lambda^2 y - x^2 y, \tag{4.17}$$

ce qui implique que

$$x^2 y = \lambda y - \lambda^2 y - L_p y. \tag{4.18}$$

De plus, on a

$$\int_0^a x^2 |y(x)| dx \leq |\lambda|^2 \|y\|_{L^2(0,a)} + |\lambda| \|y\|_{L^2(0,a)} + \|L_p y\|_{L^2(0,a)} < +\infty,$$

On conclut que $y \in \mathcal{D}(S_a) \setminus \{0\}$, et qu'on a

$$\lambda^2 Ay + \lambda By + Cy = 0. \tag{4.19}$$

Par conséquent

$$L_p(\lambda^2 Ay) + L_p(\lambda By) + L_p(Cy) = 0,$$

ce qui s'écrit

$$S_a y = (\lambda - \lambda^2) y.$$

Ainsi, λ est une valeur propre quadratique de S_a.

Ce qui achève la preuve du théorème.

□

4.3 Traitement numérique

Dans cette section, pour établir des tests numériques nous allons étudier un problème spectral dont les valeurs propres sont connues. Nous signalons que ce problème a déjà été étudié dans les travaux [19] et [10].

Soit le problème des valeurs propres de l'oscillateur harmonique S définie par (4.1). Ainsi, pour $\mu \in \mathbb{C}$ et $y \in \mathcal{D}(S) \setminus \{0\}$ on a

$$Sy = \mu y, \tag{4.20}$$

qui s'écrit sous la forme suivante :

$$(P'') \begin{cases} -y'' + x^2 y = \mu y, & x \in [0, +\infty[\\ y(0) = 0. \end{cases}$$

On peut remarquer que le problème (P'') est équivalent au problème (P') mentionné dans la deuxième partie de ce chapitre, ce qui implique que les valeurs propres de l'oscillateur harmonique S, peuvent être exprimées en fonction de λ par l'équation $\mu = (\lambda - \lambda^2)$. Ces valeurs propres sont bien connues et sont données par l'ensemble $\{4n - 1,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

En particulier, si μ prend la valeur $4n-1$ alors on peut déduire de l'équation $\mu = (\lambda - \lambda^2)$ que les valeurs propres associées au problème (P'), sont données par $\lambda = \frac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{16n-5}}{2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après les résultats obtenus dans [11], on peut définir le spectre $\text{sp}(S)$ par

$$\text{sp}(S) = \bigcup_{a>0} \text{sp}(S_a), \tag{4.21}$$

où, l'opérateur S_a est défini par

$$S_a = -y'' + x^2 y, \; y(0) = 0, \; y(a) = 0. \tag{4.22}$$

Pour cela, il suffit d'étudier le spectre de S_a.

Soit le problème des valeurs propres $S_a y = \mu y$, ce problème est équivalent à

Trouver $\mu \in \mathbb{C}$ et $y \in \mathcal{D}(S_a) \setminus \{0\}$ vérifiant

$$\begin{cases} -y'' + x^2 y = \mu y = (\lambda - \lambda^2) y, \\ y(0) = y(a) = 0. \end{cases}$$

Dans la suite, nous allons utiliser trois techniques d'approximation, à savoir la méthode de Nyström, la méthode de Sloan et la méthode de Kantorovich, pour construire des suites d'opérateurs $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui seront des approximations des opérateurs A, B et C.

On note par Ξ_n la subdivision de l'intervalle $[0, a]$ donnée par

$$\Xi_n = \left\{ h_n = \frac{a}{n-1}, \; x_j = (j-1)h_n, \; 1 \le j \le n, \; n \ge 2 \right\} \tag{4.23}$$

4.3.1 Approximation par la méthode de Nyström

La méthode de Nyström pour estimer les opérateurs intégraux A, B et C est utilisée à cause de sa convergence en collectivement compact, comme établi dans la référence [2]. Grâce à cette approximation, nous pourrons définir les suites d'opérateurs $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

$$A_n y(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i K_a(x, t_i) y(t_i), \tag{4.24}$$

$$B_n y(x) = -\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i K_a(x, t_i) y(t_i), \tag{4.25}$$

$$C_n y(x) = y(x) + \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i K_a(x, t_i) t_i^2 y(t_i), \tag{4.26}$$

où,

les poids ω_i vérifient, $\omega_1 = \omega_{n+1} = \frac{h}{2}$ et $\omega_i = h$ pour $1 \le i \le n$.

Par conséquent, lorsque on remplace x par t_j, pour $1 \leq j \leq n+1$, on obtient le problème spectral matriciel quadratique, issu de la discrétisation de A, B et C,

$$\lambda_n^2 M_A v + \lambda_n M_B v + M_C v = 0, \tag{4.27}$$

où, les matrices

$$M_A(i,j) = \omega_i K_a(t_j, t_i), \tag{4.28}$$

$$M_B(i,j) = -\omega_i K_a(t_j, t_i), \tag{4.29}$$

$$M_C(i,j) = I_{n+1}(i,j) + \omega_i K_a(t_j, t_i) t_i^2, \tag{4.30}$$

I_{n+1} est la matrice d'identité d'ordre $n+1$ et v est le vecteur propre quadratique.
Dans la suite, on va utiliser la fonction **"polyeig"** dans MATLAB, pour calculer les valeurs quadratiques associées aux matrices (M_A, M_B, M_C).

4.3.2 Approximation par la méthode de Sloan

Dans cette section, on utilise la méthode de Sloan, pour construire les suites d'opérateurs $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. De plus, on montre que ces suites vérifiént les conditions de la $\nu-$convergence généralisée, mentionnée dans le deuxième chapitre.

Tout d'abord, on rappelle que l'opérateur C, définie dans la formule (4.12), s'écrit comme suit :

$$C = D + I$$

où I est l'opérateur identité de BL($\mathcal{B}$) et

$$Dy(x) = \int_0^a K_a(x,t) t^2 y(t) dt. \tag{4.31}$$

Ensuite, nous appliquons la méthode de projection de Sloan sur les opérateurs A, B, et D, pour construire leurs approximations définies par

$$A_n^{\mathbf{S}} = A\pi_n, \quad B_n^{\mathbf{S}} = B\pi_n, \quad D_n^{\mathbf{S}} = D\pi_n, \tag{4.32}$$

où π_n est l'opérateur de projection.

Le théorème suivant montre que les suites d'opérateurs obtenues par la méthode de projection de Sloan, vérifient les hypothèses supposées dans nos études théoriques (chapitre 02).

Théorème 4.3.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les suites d'opérateurs $A_n^{\mathbf{S}}, B_n^{\mathbf{S}}$ et $D_n^{\mathbf{S}}$ convergent en $\nu-$ convergence généralisée vers les opérateurs A, B et D respectivement.

Preuve.

Au début, on va montrer que les suites $A_n^{\mathbf{S}}, B_n^{\mathbf{S}}, D_n^{\mathbf{S}}$ sont bornées pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
On note par $L_n^{\mathbf{S}} \in \left\{A_n^{\mathbf{S}}, B_n^{\mathbf{S}}, D_n^{\mathbf{S}}\right\}$, et la norme de $L_n^{\mathbf{S}}$ vérifie

$$\|L_n^{\mathbf{S}}\| \leq \|L\|\|\pi_n\|.$$

Comme l'opérateur L est l'un de trois opérateurs A, B, D, $(L \in \{A, B, D\})$ et l'opérateur de projection π_n sont bornés, on conclut que $L_n^{\mathbf{S}}$ est borné.

Ensuite, on va montrer que les normes $\|\left(A_n^{\mathbf{S}} - A\right)L\|$, $\|\left(B_n^{\mathbf{S}} - B\right)L\|$ et $\|\left(D_n^{\mathbf{S}} - D\right)L\|$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\|\left(A_n^{\mathbf{S}} - A\right)L\| = \|A\left(\pi_n - I\right)L\|.$$

Comme L est un opérateur intégral avec un noyau régulier, il est compact. De plus $\pi_n x \to x$, $\forall x \in L^2(0, a)$, et donc, cette norme $\|\left(A_n^{\mathbf{S}} - A\right)L\|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
De manière similaire, on montre que $\|\left(B_n^{\mathbf{S}} - B\right)L\|$ et $\|\left(D_n^{\mathbf{S}} - D\right)L\|$ convergent vers 0.

Enfin, on va montrer que les normes $\|\left(A_n^{\mathbf{S}} - A\right)L_n^{\mathbf{S}}\|$; $\|\left(B_n^{\mathbf{S}} - B\right)L_n^{\mathbf{S}}\|$ et $\|\left(D_n^{\mathbf{S}} - D\right)L_n^{\mathbf{S}}\|$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.
Soit $L_n^{\mathbf{S}} \in \left\{A_n^{\mathbf{S}}, B_n^{\mathbf{S}}, D_n^{\mathbf{S}}\right\}$. En reconduisant les arguments précédents, on a alors

$$\|\left(A_n^{\mathbf{S}} - A\right)L_n^{\mathbf{S}}\| = \|A\left(\pi_n - I\right)L\pi_n\|,$$

$$\|\left(B_n^{\mathbf{S}} - B\right)L_n^{\mathbf{S}}\| = \|B\left(\pi_n - I\right)L\pi_n\|,$$

$$\|\left(D_n^{\mathbf{S}} - D\right)L_n^{\mathbf{S}}\| = \|D\left(\pi_n - I\right)L\pi_n\|,$$

qui convergent vers 0.

En se référant à ce qui a été établi ci-dessus, $A_n^{\mathbf{S}}, B_n^{\mathbf{S}}$ et $D_n^{\mathbf{S}}$ convergent alors en $\nu-$ convergence généralisée vers A, B et D respectivement.

□

Maintenant pour obtenir un système matriciel, on va procéder à la discrétisation des opérateurs A, B et D.
A l'aide de la même subdivision définie par (4.23) et en appliquant la projection de Sloan, pour transformer le problème de dimension infinie en un problème matriciel (voir [2]), on obtient

$$A_n^{\mathbf{S}}u(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)u(x_j), \quad B_n^{\mathbf{S}}u(x) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(x)u(x_j), \quad D_n^{\mathbf{S}}u(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(x)u(x_j),$$

où,

$$\alpha_j(x) = \int_0^a K_a(x,t)e_j(t)dt, \quad \beta_j(x) = \int_0^a -K_a(x,t)e_j(t)dt, \quad \gamma_j(x) = \int_0^a K_a(x,t)t^2 e_j(t)dt, \tag{4.33}$$

$\{e_j\}_{j=1}^n$ sont les fonctions chapeaux définies par les formules suivantes :
pour $2 \leq j \leq n-1$, on a

$$e_j(t) = \begin{cases} \dfrac{t-t_{j-1}}{h} & \text{si } t_{j-1} \leq t \leq t_j, \\ \dfrac{t_{j+1}-t}{h} & \text{si } t_j \leq t \leq t_{j+1}, \\ 0 & \text{par ailleurs} \end{cases}$$

$$e_1(t) = \begin{cases} \dfrac{t_2-t}{h} & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\ 0 & \text{par ailleurs} \end{cases}$$

$$e_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t-t_{n-1}}{h} & \text{si } t_{n-1} \leq t \leq t_n, \\ 0 & \text{par ailleurs} \end{cases}$$

Le problème spectral matriciel quadratique, issu de la discrétisation de A, B et D en utilisant la méthode de Sloan s'écrit

$$\lambda_n^2 M_{A_n^{\mathbf{S}}} u_n + \lambda_n M_{B_n^{\mathbf{S}}} u_n + M_{D_n^{\mathbf{S}}} u_n + I_n u_n = 0, \tag{4.34}$$

où λ_n est la valeur propre approximative, u_n le vecteur propre associé à λ_n et les matrices $M_{A_n^{\mathbf{S}}}$, $M_{B_n^{\mathbf{S}}}$ et $M_{D_n^{\mathbf{S}}}$ sont données par

$$M_{A_n^{\mathbf{S}}}(i,j) = \alpha_j(t_i), \quad (4.35)$$

$$M_{B_n^{\mathbf{S}}}(i,j) = \beta_j(t_i), \quad (4.36)$$

$$M_{D_n^{\mathbf{S}}}(i,j) = \gamma_j(t_i). \quad (4.37)$$

On rappelle que $(4.35-4.37)$ seront associés à la fonction **"polyeig"** dans MATLAB, pour calculer les valeurs propres associées au triplet $(M_{D_n^{\mathbf{S}}}+I, M_{B_n^{\mathbf{S}}}, M_{A_n^{\mathbf{S}}})$.

4.3.3 Approximation par la méthode de Kantorovich

Avec la même subdivision (4.23), on va construire les suites d'opérateurs $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ensuite, on va appliquer la méthode de la projection de Kantorovich aux opérateurs A, B et D donnés par les mêmes formules présentées dans la méthode de Sloan à savoir

$$Ay(x) = \int_0^a K_a(x,t)y(t)dt. \quad (4.38)$$

$$By(x) = -\int_0^a K_a(x,t)y(t)dt, \quad (4.39)$$

$$Dy(x) = \int_0^a K_a(x,t)t^2y(t)dt. \quad (4.40)$$

Rappelons que la méthode de Kantorovich est caractérisée par sa convergence en norme (voir [1]).

Commençons par appliquer la projection de Kantorovich sur les opérateurs A, B, D, pour définir les opérateurs approximatifs $A_n^{\mathbf{K}}, B_n^{\mathbf{K}}, D_n^{\mathbf{K}}$ (voir [2]). On obtient

$$A_n^{\mathbf{K}}x(t) = \sum_{j=1}^{n} Ax(t_j)e_j(t) = \sum_{j=1}^{n}\left[\int_0^a K_a(t_j,s)x(s)ds\right]e_j(t) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j(t),$$
$$B_n^{\mathbf{K}}x(t) = \sum_{j=1}^{n} Bx(t_j)e_j(t) = \sum_{j=1}^{n}\left[\int_0^a -K_a(t_j,s)x(s)ds\right]e_j(t) = \sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j(t),$$
$$D_n^{\mathbf{K}}x(t) = \sum_{j=1}^{n} Dx(t_j)e_j(t) = \sum_{j=1}^{n}\left[\int_0^a K_a(t_j,s)s^2x(s)ds\right]e_j(t) = \sum_{j=1}^{n}\gamma_j e_j(t),$$

où α_j, β_j et γ_j sont donnés par (4.33).

Ainsi, le problème spectral quadratique sera réécrit sous la forme d'un problème de valeurs propres quadratiques de dimension finie :

$$\lambda^2 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j(t) + x(t) = 0. \tag{4.41}$$

En multipliant (4.41) respectivement, par $K_a(t_i, s)$, $-K_a(t_i, s)$ et $K_a(t_i, s)s^2$, puis en intégrant sur $[0, a]$, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \sum_{j=1}^{n} P_1(i,j)\alpha_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} P_1(i,j)\beta_j + \sum_{j=1}^{n} P_1(i,j)\gamma_j + \alpha_i = 0,\\
\lambda^2 \sum_{j=1}^{n} P_2(i,j)\alpha_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} P_2(i,j)\beta_j + \sum_{j=1}^{n} P_2(i,j)\gamma_j + \beta_i = 0,\\
\lambda^2 \sum_{j=1}^{n} P_3(i,j)\alpha_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} P_3(i,j)\beta_j + \sum_{j=1}^{n} P_3(i,j)\gamma_j + \gamma_i = 0,
\end{aligned}$$

où, les matrices P_1, P_2 et P_3 sont données par

$$\begin{aligned}
P_1(i,j) &= \int_0^a K_a(t_i, s)e_j(s)ds,\\
P_2(i,j) &= \int_0^a -K_a(t_i, s)e_j(s)ds,\\
P_3(i,j) &= \int_0^a K_a(t_i, s)s^2 e_j(s)ds.
\end{aligned}$$

Cela nous permet d'obtenir le système sous la forme matricielle par blocs suivante :

$$\lambda_n^2 \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ P_2 & 0 & 0 \\ P_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \lambda_n \begin{bmatrix} 0 & P_1 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & P_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_n & 0 & P_1 \\ 0 & I_n & P_2 \\ 0 & 0 & P_3 + I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.42}$$

Le système (4.42) sera résolu en utilisant la fonction **"polyeig"** dans MATLAB, ce qui nous permet de calculer les valeurs propres quadratiques.

4.4 Tests numériques

Dans notre traitement numérique, on introduit l'argument suivant :

$$\lambda_n \text{ est dite } \varepsilon - \text{valeur propre acceptable, si } d(\lambda_n, \text{sp}(S_a)) < \varepsilon,\ \varepsilon > 0. \tag{4.43}$$

On note par d la distance entre λ_n et le spectre de l'opérateur oscilation harmonique S_a. Cette condition nous permet d'obtenir la propriété U numériquement et ainsi, le problème de la pollution spectrale est résolu.

On note par

– $VP_{app}(n)$, le nombre de valeurs propres approximatives obtenues pour $n \geq 1$.

– $VP_{acc}(n)$, le nombre de $\varepsilon -$ valeurs propres acceptables obtenues pour $n \geq 1$.

– $P\% = [VP_{acc}(n)/VP_{app}(n)]\,\%$.

Pour illustrer les résultats numériques obtenus par les trois approximations (Nyström, Sloan et Kantorovich), on a procédé aux tests numériques pour différentes valeurs de n avec ε et a fixés.

Les résultats obtenus par la méthode de Nyström sont présentés dans les tableaux.
Tableau 4.1 concerne le cas : $\varepsilon = 10^{-2}$, $a = 1$.

n	VP_{app}	VP_{acc}	$P\%$
100	198	166	83%
200	398	374	93%
300	598	570	95%
400	798	764	95%
500	998	974	97%

Table 4.1 – Pourcentage des valeurs propres $\varepsilon = 10^{-2} -$ acceptable d'après 4.43.

Pour $\varepsilon = 10^{-3}$ et $a = 1$, les résultats numériques sont présentés dans le tableau 4.2. Pour

n	VP_{app}	VP_{acc}	$P\%$
100	198	20	10%
200	398	106	26%
300	598	232	38%
400	798	400	50%
500	998	632	63%
600	1198	860	71%
700	1398	1074	76%
800	1598	1276	79%
900	1798	1466	81%
1000	1998	1682	84%
1200	2398	2074	86%
1400	2798	2458	87%
2000	3998	3678	92%
2500	4998	4688	93.8%

Table 4.2 – Pourcentage des valeurs propres $\varepsilon = 10^{-3}$ – acceptable d'après 4.43.

les résultats obtenus par la méthode de Sloan avec $a = 1$ et $\varepsilon = 10^{-2}$, on a le tableau 4.3.

n	VP_{app}	VP_{acc}	$P\%$
100	195	165	84.62%
200	395	365	92.41%
300	567	567	95.29%
400	795	763	95.97%
500	995	967	97.19%

Table 4.3 – Pourcentage des valeurs propres $\varepsilon = 10^{-2}$ – acceptable d'après 4.43.

Tableau 4.4 représente les résultats obtenus par la méthode de Kantorovich pour $a = 1$ et $\varepsilon = 10^{-2}$

n	VP_{app}	VP_{acc}	$P\%$
100	196	166	8.69%
200	396	366	92.42%
300	596	568	95.30%
400	796	764	95.98%
500	996	968	97.19%

Table 4.4 – Pourcentage des valeurs propres $\varepsilon = 10^{-2}$ – acceptable d'après 4.43.

Nous comparons notre méthode avec la méthode des différences finies (FD) pour mieux montrer son efficacité et exposer le problème de pollution pour (FD). Nous utilisons la même grille Ξ_n définie ci-dessus. On note $u_j = u(x_j)$ les valeurs approchées de u dans le noeud x_j. En utilisant le schéma centré en trois points de la dérivée seconde, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} + x_j^2 u_j = (\lambda - \lambda^2)u_j, \quad j = \overline{2, n-2}, \\ u_1 = u_n = 0. \end{cases}$$

Nous avons fait des tests numériques en utilisant la méthode des différences finies (FD) et l'approximation quadratique généralisée du spectre (GQS) avec la méthode de Sloan. On prend différentes valeurs de n et on fixe les valeurs $a = 1$ et $\varepsilon = 10^{-2}$.
Tableau 4.5 propose de comparer les deux méthodes (FD) et (GQS) qui sont utilisées dans le calcul des valeurs propres quadratiques approchées.

Table 4.5 – Pourcentage de la valeurs propres 10^{-2} – acceptable.

n	nb-app-val	nb-acc-val-FDM	nb-acc-val-GQS	Perc-FD%	Perc-GQS%
100	195	0	165	0%	84.62%
200	395	6	365	1.5%	92.41%
300	567	6	567	1%	95.29%
400	795	6	763	0.75%	95.97%
500	995	8	967	0.80%	97.19%

4.5 Conclusion

D'après les résultats obtenus dans nos tests numériques, on remarque que si la valeur de n croit, le nombre de valeurs propres acceptables augmente également, ce qui signifie que ces

valeurs convergent vers les valeurs propres exactes. A cet égard, l'application de la méthode d'approximation du spectre quadratique généralisée avec les trois méthodes (Nyström, Sloan, Kantorovich) permet d'éviter le problème de la pollution spectrale, apparu dans l'approximation spectrale des opérateurs non bornés.
Nos tests numériques ont montré l'efficacité de la méthode d'approximation du spectre quadratique généralisé basée sur les méthode de Nyström, de Sloan et de Kantorovich par rapport aux méthodes classiques. L'augmentation en pourcentage des valeurs propres de $\varepsilon-$acceptable dans notre méthode d'approximation du spectre quadratique généralisé permet d'éviter la pollution spectrale.

Les résultats obtenus dans le dernier tableau montrent que lorsque la valeur de n est suffisamment grande, le pourcentage de valeurs spectrales acceptables augmente, et que les résultats obtenus par notre méthode sont bien meilleurs que ceux donnés par la méthode des différences finies. Ces résultats montrent que la méthode d'approximation spectrale évite la pollution spectrale, contrairement à la méthode des différences finies qui constitue une pollution spectrale lorsqu'elle est utilisée pour approximer des problèmes aux valeurs propres associées aux opérateurs non bornés.

Conclusion Générale

La recherche présentée dans cette thèse a été consacrée à l'approximation du spectre quadratique généralisé des opérateurs bornés. Nous avons réussi à établir la propriété U et la propriété L, démontrant, ainsi, que le problème de la pollution spectrale n'intervient pas sur l'approximation des problèmes spectraux quadratiques associés aux opérateurs bornés.

Ce résultat significatif nous permet de résoudre le problème de la pollution spectrale qui peut survenir lors de l'approximation spectrale d'un opérateur non borné en utilisant la méthode du spectre quadratique généralisé.

Au cours de cette recherche, nous avons ouvert la voie à plusieurs perspectives futures. L'une de ces perspectives consistera à développer une méthode itérative visant à déterminer la meilleure valeur propre quadratique (maximale ou minimale), ce qui revêt une grande importance pour d'autres domaines de recherche.

Une autre perspective porte sur la construction de l'opérateur de projection associé à la résolvante quadratique généralisée. Enfin, nous chercherons à développer une notion pour le pseudospectre quadratique généralisé.

Cette thèse représente une avancée significative dans notre compréhension de l'approximation du spectre quadratique généralisé et ouvre la porte à de futures recherches passionnantes dans ce domaine.

Bibliographie

[1] Ahues M., Largillier A., Limaye B. *Computations For Bounded Operators.* CRC Press., 2001.

[2] Atkinson K. E. *The Numerical Solution of Integral Equations of The Second Kind.* Cambridge University Press., 1996.

[3] Bairamov E., Çakar Ö., Çelebi A. O. *Quadratic Pencil of Schrödinger Operators With Spectral Singularities : Discrete Spectrum And Principal Functions.* Journal of Mathematical Analysis and Applications., 1997, vol. 216, no. 1, pp. 303-320. DOI :10.1006/jmaa.1997.5689.

[4] Boulton L. *Spectral Pollution And Eigenvalue Bounds.* Applied Numerical Mathematics., 2016, vol. 99, pp 1-23. DOI :10.1016/j.apnum.2015.08.007.

[5] Cances, E., Ehrlacher, V., Maday, Y. : Periodic Schrödinger operators with local defects and spectral pollution, SIAM Journal on Numerical Analysis, V.50, N.6, pp.3016-3035, (2012).

[6] Chen C., Ma C. *An Accelerated Cyclic-Reduction-Based Solvent Method For Solving Quadratic Eigenvalue Problem of Gyroscopic Systems.* Computers and Mathematics with Applications., 2019, vol. 77, no. 10, pp. 2585-2595. DOI :10.1016/j.camwa.2018.12.040.

[7] Davies, E. B., Plum, M. *Spectral Pollution.* IMA journal of numerical analysis., 2004, vol. 24, no. 3, pp. 417-438. DOI :10.1093/imanum/24.3.417.

[8] Davies, E. B Linear oprerators and their spectra. Cambridge University Press, (2007).

[9] Gohberg. I, S. Goldberg, M. A. Kaashoek : Classes of Linear Operators Vol. 63. Birkhäuser, 2013.

[10] Guebbai H. *Generalized Spectrum Approximation And Numerical Computation of Eigenvalues For Schrödinger's Operators.* Lobachevskii Journal of Mathematics., 2013, vol. 34, no. 1, pp. 45-60. DOI :10.1134/S1995080213010058.

[11] Guebbai H., Largillier A. *Spectra And Pseudo Spectra of a Convection Diffusion Operator.* Integral Methods in Science and Engineering., 2011, pp. 173-180. DOI :10.1007/978-0-8176.

[12] Huang T. M., Lin W. W., Tian H., Chen G. H. *The Full Spectrum of Large Sparse Palindromic Quadratic Eigenvalue Problems Arising From Surface Green's Func-*

tion Calculations. Journal of Computational Physics., 2018, vol. 356, pp. 340-355. DOI :10.1016/j.jcp.2017.12.011.

[13] Kamouche, S., Guebbai, H., Ghiat, M., Segni, S. : Generalized quadratic spectrum approximation in bounded and unbounded cases, Probl. Anal. Issues Anal, Vol.10(28),No3, 2021, pp, 53-70.

[14] Kamouche, S., Guebbai, H. : New Convergence Mode For Generalized Spectrum Approximation. Numer. Analys. Appl. 15, 336-342 (2022). https ://doi.org/10.1134/S1995423922040061

[15] Kamouche. S, Guebbai. H, Ghiat. M, Kurulay. M The Kantorovich projection method in the generalized quadratic spectrum approximation, Numerical Methods and Programming. 23 (3), 240-247 (2022).

[16] Khellaf A., Guebbai H., Lemita S., Aissaoui M. Z. *Eigenvalues Computation by The Generalized Spectrum Method of Schrödinger's Operator.* Computational and Applied Mathematics., 2018, vol. 37, no. 5, pp. 5965-5980. DOI :10.1007/s40314-018-0673-8.

[17] Khellaf A., Merchela W., Guebbai H. *New Sufficient Conditions For The Computation of Generalized Eigenvalues.* Russian Mathematics., 2021, vol. 65, no. 2, pp. 65-68. DOI :10.3103/S1066369X21020067.

[18] Khellaf A., Guebbai H. *A Note On Generalized Spectrum Approximation.* Lobachevskii Journal of Mathematics., 2018, vol. 39, no. 9, pp. 1388-1395. DOI :0.1134/S1995080218090263.

[19] Khellaf A., Théorie spectrale avec une approche numérique, Thèse de doctorat, Analyse non linéaire et modélisation, Université 08 Mai 1945, Guelma, (2019) , pp, 53-70.

[20] Koyunbakan, H. : Inverse problem for a quadratic pencil of SturmLiouville operator, Journal of mathematical analysis and applications, V.378, N.2, pp.549-554, (2011), https ://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.01.069.

[21] Krall A. M., Bairamov E., Çakar Ö. *Spectrum and Spectral Singularities of a Quadratic Pencil of a Schrödinger Operator With a General Boundary Condition.* Journal of Differential Equations., 1999, vol. 151, no. 2, pp. 252-267. DOI :10.1006/jdeq.1998.3519.

[22] Llobet X., Appert K., Bondeson A., Vaclavik J. *On Spectral Pollution.* Computer physics communications., 1990, vol. 59, no. 2, pp. 199-216. DOI :10.1016/0010-4655(90)90170-6.

[23] Nair, M.T. : Linear operator equations : approximation and regularization, World Scientific, (2009).

[24] Rappaz J., Hubert J. S., Palencia E. S., Vassiliev D. *On Spectral Pollution in The Finite Element Approximation of Thin Elastic membrane Shells.* Numerische Mathematatik., 1997, vol. 75, no. 4, pp. 473-500. DOI :10.1007/s002110050249

[25] Roach G. F. *Green's Functions.* Cambridge Univ. Press., 1982.

[26] Tisseur F., Meerbergen K. *The Quadratic Eigenvalue Problem.* SIAM review, 2001, vol. 43, no. 2, pp. 235-286. DOI :10.1137/S0036144500381988.